

CURSO DE MATHEMATICAS ELEMENTARES

ELEMENTOS
DE
TRIGONOMETRIA

COM
NUMEROSOS EXERCICIOS

POR F. I. C.

Revistos e adaptados ás escolas de instrucção secundaria do Brazil

PELO

EUGENIO DE BARROS RAJA GABAGLIA

Doctor em sciencias physicas e mathematicas

Lente do Gymnasio Nacional

e dos Escolas Naval e Polytechnica de Rio de Janeiro



LIVRARIA GARNIER

109, Rua do Ouvidor, 109
RIO DE JANEIRO

6, Rue des Saints-Pères, 6
PARIS

Gerhes Rocha
1935.



ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRIA

Curso de mathematicas elementares.

ELEMENTOS
DE
TRIGONOMETRIA

COM
NUMEROSOS EXERCICIOS

POR F. I. C.

REVISTOS E ADAPTADOS ÀS ESCOLAS DE INSTRUÇÃO SECUNDARIA DO BRAZIL

PELO

D^a E. DE B. RAJA GABAGLIA



LIVRARIA GARNIER

109, RUA DO OUVIDOR, 109
RIO DE JANEIRO

6, RUE DES SAINTS-PÈRES, 6
PARIS

Gerhard Racha

ELEMENTOS
DE
TRIGONOMETRIA
RECTILINEA

PRELIMINARES

§ 1. — Segmentos de recta.

I. Definições. — Um movel póde deslocar-se sobre uma recta em dois sentidos oppostos; um d'elles, tomado arbitrariamente, chama-se *sentido positivo*; o outro é o *sentido negativo*.

Chama-se *recta dirigida*, uma recta indefinida sobre a qual se escolheu o sentido positivo.

Chama-se *segmento de recta* uma parte de recta que se suppõe percorrida por um movel em um sentido determinado. O ponto de partida do movel é a *origem* do segmento; seu ponto de chegada é a *extremidade* do segmento.

Entre dois pontos A, B, existem dois segmentos distinctos; pois póde se tomar por origem o ponto A ou o ponto B. Estes dois segmentos têm o mesmo comprimento, medido por um mesmo numero; mas está convencido representar-se esse numero por AB ou por BA conforme o movel caminha de A para B ou de B para A, a primeira letra da notação designando sempre a origem do segmento considerado.

Quando um segmento AB pertence a uma recta dirigida, qualifica-se de *positivo* ou de *negativo*, segundo que seu proprio sentido coincide com o sentido positivo da recta, ou com o sentido negativo. Então a notação AB já não representa sómente um numero arithmetico, mas sim um numero algebrico, positivo ou negativo: aquelle cujo valor absoluto mede a distancia dos pontos A e B e cujo signal + ou — marca o sentido do segmento AB.

Se o segmento AB é positivo, o segmento BA é negativo e reciprocamente. Em todos os casos, podemos escrever

$$AB = -BA$$

d'onde

$$AB + BA = 0$$

(A'

II. Lemma. — A soma algebraica de tres segmentos consecutivos, tais que a extremidade do ultimo coincide com a origem do primeiro, é nulla.

Em outros termos, se tres pontos A, B, C estão dispostos sobre a mesma recta n'uma ordem qualquer, temos sempre

$$AB + BC + CA = 0 \quad (B)$$

1.º Supponhamos AB positivo. — Em relação aos outros dois, o ponto C pode ser collocado successivamente de tres maneiras: sobre o prolongamento de AB, entre A e B, ou sobre o prolongamento de BA.

No primeiro caso escrevendo-se primeiramente os segmentos positivos,

$$\begin{array}{lcl} \text{Fig. 1.} & \text{temos} & AB + BC = AC = -CA \\ & \text{e onde} & AB + BC + CA = 0 \end{array}$$

No segundo caso,

$$\begin{array}{lcl} \text{Fig. 2.} & \text{temos} & AC + CB = AB \\ & \text{ou} & -CA - BC = AB \\ & \text{onde} & AB + BC + CA = 0 \end{array}$$

No terceiro caso,

$$\begin{array}{lcl} \text{Fig. 3.} & \text{temos} & CA + AB = CB = -BC \\ & \text{e por consequencia} & AB + BC + CA = 0 \end{array}$$

2.º Supponhamos AB negativo. — Ha tres casos analogos a distinguir; mas estes tres novos casos são a dar com tres primeiros, mudando o sentido positivo da recta dirigida; o que equivale a mudar o signal de todos os termos da igualdade (B).

Essa relação é pois verificada em todos os casos possíveis.

III. Theorema de Mésaire. — A somma algebraica de um numero qualquer de segmentos consecutivos, tais que a extremidade do ultimo coincide com a origem do primeiro, é nulla.

Tenta-se de demonstrar que se n pontos A, B, C, ..., K, L acham-se collocados sobre uma recta de uma maneira qualquer, temos sempre

$$AB + BC + \dots + KL + LA = 0 \quad (C)$$

Este theorema já se achá demonstrado para dois pontos e para tres pontos, em virtude das igualdades (B) e (B').

Seu se é verdadeiro para (n - 1) pontos, tambem o é, ipso facto, para n pontos.

Se o theorema é verdadeiro para os (n - 1) pontos A, B, C, ..., J, K, temos

$$AB + BC + \dots + JK + KA = 0$$

Pois-se, pois, applicar o theorema aos tres pontos A, K, L; o que

$$AK + KL + LA = 0$$

Ajustando n-vezes a mesma equação e supprimando o membro nullo $AK + KA$, vem

$$AB + BC + \dots + JK + KL + LA = 0$$

Logo, visto que o theorema é applicavel a n - 1 pontos, tambem o é a n pontos.

Logo, visto que o theorema, verdadeiro para tres pontos, tambem o é para quatro pontos; sendo verdadeiro para quatro pontos, tambem o é para cinco, etc. Por consequencia elle é geral.

IV. Corollario. — A somma algebraica de muitos segmentos consecutivos de uma mesma recta é igual ao segmento que vai a origem do primeiro a extremidade do ultimo.

Efectivamente, os segmentos consecutivos AB, BC, ..., KL, satisfazem á relação (C), que se pode escrever

$$AB + BC + \dots + KL = -LA = AL$$

§ II. — Projectões orthogonas sobre um eixo.

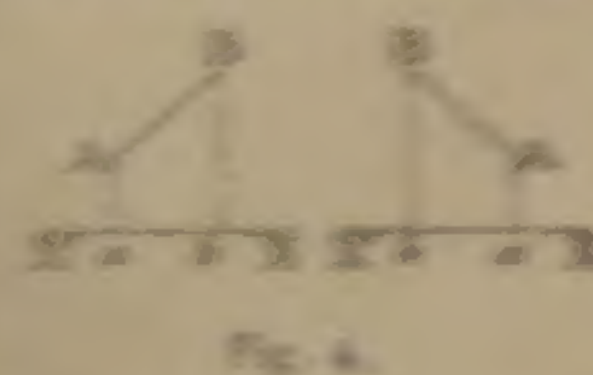
V. Projectão de um ponto. — Chama-se projectão de um ponto A sobre uma recta XY, a pé da perpendicular baixada d'esse ponto sobre essa recta.

Uma recta indefinida XY, sobre a qual projecta-se um ou mais pontos, chama-se eixo da projectão.

VI. Projectão de um segmento. — Chama-se projectão de um segmento rectilíneo AB, sobre um eixo XY, o segmento ab que vai a projectão do origem A a projectão da extremidade B.

Escreve-se $\text{proj. } AB = ab$

Em geral, a recta AB tendo uma direcção qualquer, sobre a qual não se escolhe um sentido positivo, o segmento AB, se bem que tenha um sentido, não está entretanto affecto de nenhum signal e só se considera o seu valor absoluto. O eixo XY, ao contrario, é uma recta dirigida; e, por consequencia, a projectão ab é positiva ou negativa.



* Este theorema tambem pôde ser demonstrado de seguinte modo: applicando o lemma a cada grupo de pontos

$$ABC, BCD, ADE, \dots, KIL,$$

pôde-se escrever

$$AB + BC + CA = 0$$

$$BC + CD + DB = 0$$

$$CD + DE + EC = 0$$

$$\dots$$

$$KL + LI + IK = 0$$

Se addicionarmos todas essas igualdades membro a membro, tomando que os termos nullo cancelam-se, obtemos de novo a relação (C) com

$$AB + BC + CD + \dots + KL + LA = 0$$

VII. Translação do eixo. — As projecções de um mesmo segmento de recta sobre dois eixos paralelos são iguaes e te o mesmo signal.

Essas projecções são iguaes em valor absoluto, como porções de parallelas comprehendidas entre parallelas; e tem evidentemente o mesmo signal, se a direcção positiva é a mesma sobre os dois eixos.

VIII. Observação I. — As projecções de dois segmentos iguaes e de sentido contrarios AB, BA, sobre o mesmo eixo, são iguaes e de signaes contrarios.

Essas projecções são ab e ba .

Temos (I, A) $ab = -ba$.

IX. Observação II. — A projecção de um segmento AB sobre um eixo X'X é nulla em duas circumstancias:

- 1º Quando o segmento AB é nullo;
- 2º Quando o segmento AB é perpendicular ao eixo X'X.

X. Contorno polygonal. — Quando um movel descreve uma linha polygonal ABC...KL, no sentido marcado pela ordem das letras, seu ponto de partida, A, se chama *origem do contorno*, e seu ponto de chegada, L, a *extremidade do contorno*.

O segmento AL, que une a origem do contorno á sua extremidade, se chama a *resultante do contorno polygonal*.

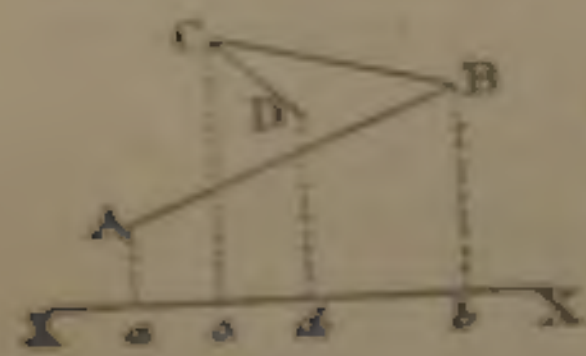


Fig. 3.

XI. Projecção de um contorno. — Chama-se *projecção de um contorno polygonal sobre um eixo*, a *somma algebrica das projecções, sobre esse eixo, de cada um dos lados do polygono*.

A projecção do contorno ABCD se escreve:

$$\text{proj. (ABCD)} = \text{proj. AB} + \text{proj. BC} + \text{proj. CD} = ab + bc + cd$$

XII. Theorema das projecções. — A projecção de um contorno polygonal sobre um eixo é igual á projecção da sua resultante sobre esse mesmo eixo.

Sejam um contorno polygonal ABC...KL, e sua resultante AL. Designemos por a, b, c, \dots, k, l , as projecções de cada um dos vertices.

Temos $\text{proj. (ABC...KL)} = ab + bc + \dots + kl$

$$\text{proj. AL} = al$$

Ora, qualquer que seja a ordem dos pontos a, b, \dots, k, l , sobre o eixo de projecção, temos, segundo a formula de Möbius (III, C)

$$ab + bc + \dots + kl + la = 0$$

$$\text{d'onde } ab + bc + \dots + kl = -la = al$$

isto é,

$$\text{proj. (ABC...KL)} = \text{proj. AL}$$

XIII. Corollario I. — se duas linhas polygonaes têm a mesma origem e a mesma extremidade, suas projecções sobre um mesmo eixo são iguaes.

Com effeito, cada uma d'ellas é igual á projecção de uma resultante commum.

XIV. Corollario II. — A projecção de um contorno fechado, sobre um eixo qualquer, é nulla.

Com effeito, essa projecção é egual á da resultante; ora, a resultante sendo nulla, sua projecção é nulla (IX).

Em todo caso, a projecção de um contorno fechado ABCDA é a *somma*.

$$ab + bc + cd + da$$

que sabemos ser identicamente nulla (III).

Observação. — A projecção de um contorno polygonal sobre um eixo é nulla em duas circumstancias:

- 1º Quando a resultante é nulla, isto é, quando o polygono é fechado;
- 2º Quando a resultante é perpendicular ao eixo de projecção

XV. Polygono reverso. — Assim se chama um contorno polygonal cujos lados não se acham todos no mesmo plano.

As definições dadas precedentemente não exigem que os diversos pontos projectados sobre um eixo estejam no mesmo plano passando por esse eixo; mas para obter as projecções a, b, \dots de diversos pontos A, B, ... que não estão no mesmo plano, faz-se passar por cada um d'esses pontos um plano perpendicular ao eixo de projecção; as intersecções d'esses planos com o eixo são as projecções procuradas.

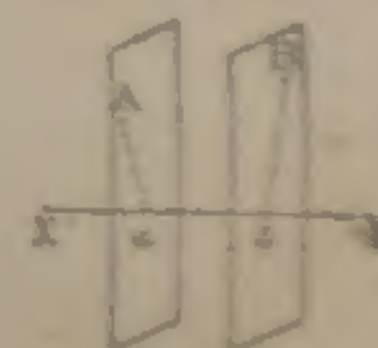


Fig. 4.

XVI. — Para que um contorno polygonal seja fechado, é necessario e sufficiente que suas projecções sobre tres eixos, formando um angulo triedro, sejam nullas separadamente para cada um dos eixos.

Essa condição é necessaria; pois, quando um contorno é fechado, sua projecção sobre um eixo é sempre nulla (XIV).

A condição é sufficiente; pois, se a projecção de um contorno sobre um eixo é nulla, a resultante d'esse contorno é nulla ou perpendicular ao eixo. Ora a resultante não pôde ser perpendicular ao mesmo tempo aos tres eixos considerados. Por consequencia, a resultante é nulla, isto é, o contorno é fechado.

XVII. Observação. — Para que um contorno polygonal plano seja fechado, basta que suas projecções sobre duas rectas concorrentes, situadas no seu plano, sejam nullas separadamente para cada um dos eixos.

Com effeito, a resultante não pôde ser perpendicular ao mesmo tempo a duas rectas concurrentes situadas com ella no mesmo plano. Por consequencia, se a projecção do contorno é nulla para cada um d'esses eixos, a resultante é nulla e o contorno é fechado.

§ III. — Das funcções.

XVIII. Variavel independente. — Uma variavel é denominada *independente*, quando se lhe attribue arbitrariamente os valores que ella é susceptivel de tomar.

XIX. Função de uma variavel. — Uma variavel é denominada *função de uma variavel independente*, quando a cada valor d'esta corresponde um valor determinado d'aquella.

Por exemplo, quando um corpo cahe em queda livre, o espaço percorrido por esse corpo é função do tempo empregado em percorrel-o: a cada valor t do tempo de queda corresponde um valor e do espaço percorrido. Sabemos que os valores correspondentes e , t , estão ligados entre si pela fórmula algebraica

$$e = \frac{gt^2}{2}$$

Qualquer expressão algebraica que contenha uma variavel x é uma função d'essa variavel; assim, x e y representando duas variaveis e , a , b , c , numeros dados, a fórmula

$$y = ax^2 + bx + c$$

permite calcular um valor de y correspondente a cada valor attribuido a x .

XX. Funções transcendentas. — Chamam-se *funções transcendentas* certas funcções que não podem ser exprimidas algebricamente por meio de sua variavel independente. Taes são os logarithmos e as funcções circulares.

Não tardaremos em definir as funcções circulares, assim denominadas porque ellas formam-se da consideração do circulo.

Em todo systema de logarithmos, assim como se vê em algebra, cada numero positivo x admite um logarithmo y . Pôde-se escrever

$$y = \log. x$$

Mas esta igualdade, puramente symbolica, não dá a conhecer as operações que se tem de effectuar sobre o numero x para obter seu logarithmo y .

Para que se possa utilizar uma semelhante função na pratica, é necessario ter taboas numericas que dêem, em frente de cada valor do numero x o valor correspondente da função y .

XXI. Notações. — Diversas funcções f , F , φ ,.... de uma mesma

variavel independente x , são representadas frequentes vezes por symbolos taes como $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$,....

Os valores que toma uma mesma função $f(x)$ para valores particulares de sua variavel $x=a$, $x=b$, $x=c$,.... se representam pelas notações $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$,....

As letras f , t , φ se denominam *caracteristicas das funcções*.

XXII. Função periodica. — Uma função é denominada *periodica* quando seu valor não muda ajuntando-se d sua variavel independente uma quantidade determinada, ou um qualquer dos multiplos d'essa quantidade.

A amplitude do periodo é a mais pequena das quantidades cujos multiplos adicionados á variavel independente reproduz o valor da função

Por exemplo, ω designando uma quantidade determinada, e k um numero inteiro qualquer; se, para todo valor de x e para todo valor do numero inteiro k , temos

$$f(x + k\omega) = f(x)$$

a função $f(x)$ é *periodica*, e a *amplitude* do periodo é ω .

XXIII. Funções inversas. — Chamam-se *funções inversas* duas variaveis que são funcções uma da outra.

Por exemplo, se y é uma função f da variavel x , inversamente, x é uma função φ de y considerada por sua vez como uma variavel independente. Estas duas funcções $y=f(x)$ e $x=\varphi(y)$ denominam-se *inversas* uma da outra.

XXIV. Representação geometrica das funcções. — Tracemos dois eixos rectangulares $X'X$, $Y'Y$ que se cortam no ponto O e escolhamos sobre esses eixos as direcções positivas OX , OY indicadas por flechas.

Sejam x e y dois valores correspondentes quaesquer, da variavel independente x e da função y , que se trata de representar.

A unidade de comprimento sendo tomada arbitrariamente, tomamos sobre OX e sobre OY , a partir da origem O um segmento OP medido em grandeza e signal pelo numero x e um segmento OQ medido em grandeza e signal pelo numero y ; em seguida terminemos o parallelogramma $QOPM$.

Suppondo que x varia de um modo continuo, y varia tambem, em geral, de um modo continuo, e o ponto M descreve no plano dos eixos uma linha continua que é a representação graphica da função considerada.

Os segmentos OP , OQ são as *coordenadas* do ponto M ; OP chama-se a *abscissa* e OQ ou PM a *ordenada* do ponto M .

O logar do ponto M representa ao mesmo tempo duas funcções inversas: a função y de x e a função x de y .

XXV. Objecto e divisões do Curso de Trigonometria. —

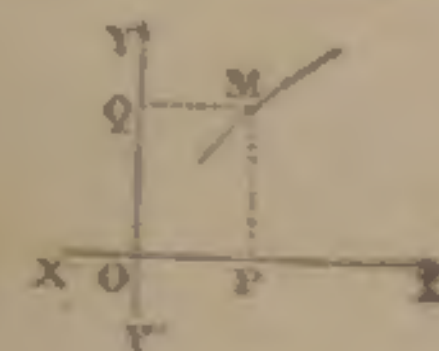


Fig. 7.

A trigonometria tem por objecto o estudo das funções circulares, e por fim especial a resolução dos triangulos pelo calculo.

Este curso está dividido em duas partes: a primeira contém os elementos da theoria das funções circulares, a construcção das taboas trigonometricas e diversos exercicios analyticos; a segunda parte é a applicação das funções circulares á resolução dos triangulos e a algumas outras questões de geometria.

Gerhes de Selloes Rocha
Barbacena, Minas, 1925.

PRIMEIRA PARTE

FUNÇÕES CIRCULARES

CAPITULO I

LINHAS TRIGONOMETRICAS

§ 1. — Arcos e angulos.

1. Medida dos angulos e dos arcos. — A medida de um angulo central é a mesma que a do arco comprehendido entre seus lados, contanto que se tome para unidade de angulo o que corresponde á unidade de arco (Geom.)

A unidade de arco e, por conseguinte, a unidade de angulo é arbitraria.

Na pratica, toma-se por unidade de arco a quarta parte da circumferencia, ou o *quadrante*; ou então, a 360° parte da circumferencia, ou o *grão*. Por isso os angulos tambem podem ser expressos de dois modos: em angulos rectos ou fracções de angulos rectos, ou então em grãos, minutos e segundos. Em todo caso, passa-se facilmente de uma a outra d'essas medidas.

Em trigonometria, convém muitas vezes tomar por unidade, não uma parte aliquota da circumferencia, mas o arco cujo comprimento é igual ao raio do circulo considerado. É facil exprimir este arco em grãos, minutos e segundos: a circumferencia de raio R tem por comprimento $2\pi R$ e equivale a 360°; por conseguinte o arco de comprimento R equivale a

$$\frac{360^\circ \times R}{2\pi R} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44'',8.$$

2. Circulo trigonometrico. — Em trigonometria, toma-se sempre por unidade de comprimento o raio do circulo que se considera. Esse circulo, cujo raio é igual a 1, chama-se *circulo trigonometrico*.

A circumferencia do circulo trigonometrico, isto é, o arco de 360°, tem de comprimento 2π ; a meia-circumferencia, ou arco de 180°, tem de comprimento π ; o quadrante, ou arco de 90° tem de comprimento $\frac{\pi}{2}$.

3. Variação dos arcos e dos angulos.

Variações dos arcos. Um movel póde deslocar-se sobre uma circumferencia em dois sentidos oppostos: um d'elles chama-se *sentido positivo*, o outro *sentido negativo*.

Diz-se que um circulo está *orientado* quando se escolheu o sentido positivo sobre sua circumferencia.

No circulo trigonometrico, o sentido do movimento dos ponteiros de um relógio é sempre considerado como o sentido negativo; o sentido positivo é pois aquelle que é indicado pela flecha (fig. 8).

Chama-se *arco* todo caminho percorrido por um movel sobre a circumferencia, em um sentido determinado; quando mesmo esse movel tivesse dado a volta toda, ou mais vezes a volta da circumferencia.

O ponto de partida do movel chama-se *origem do arco*; seu ponto de chegada é o *extremo do arco*.

Um arco é *positivo* ou *negativo* segundo é elle percorrido no sentido positivo ou no sentido negativo adoptados.

O arco é uma variavel que póde tomar todos os valores, desde $-\infty$ até $+\infty$.

Toma-se sobre o circulo trigonometrico um ponto fixo arbitrario A, a partir do qual contam-se todos os arcos e que por essa razão chama-se *origem dos arcos*; depois traçam-se os diametros rectangulares AA' BB', como indica a figura.

Suppõe-se depois que um movel M parte do ponto A e se move sobre a circumferencia no sentido positivo ABA'; o arco que elle descreve

varia de um modo continuo. Elle é nullo quando o movel parte de A; depois elle cresce e passa pelos valores especiaes: $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ e 2π , quando o movel encontra os pontos B, A', B' e volta ao ponto A. Póde-se conceber que depois d'esta primeira volta o movel dá uma segunda, depois uma terceira e assim por diante. Assim, o arco cresce indefinidamente.

Se o movel M, partindo da origem A, move-se no sentido negativo ABA', o arco percorrido é negativo; elle cresce ainda indefinidamente em valor absoluto e passa pelos valores especiaes:

$$-\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}, -2\pi, \text{etc., até } -\infty.$$

Cada vez que o ponto descrevendo M volta ao ponto A, elle percorreu um numero inteiro de circumferencias, isto é um arco que tem de comprimento $2k\pi$, k designando um numero inteiro qualquer, positivo ou negativo.

Variações dos angulos. Emquanto o ponto M move-se indefinidamente sobre a circumferencia, o ralo OM, movel com elle, gira ao redor do centro O e gera um angulo variavel AOM, que tem a mesma medida que o arco AM e ao qual se attribue o mesmo signal.

Aqui, o angulo não se acha mais sujeito, como em geometria, a ficar menor, do que dois rectos: elle poderá passar, tão bem como o arco, por todos os valores desde $-\infty$ até $+\infty$.



Fig. 8.

4. Arcos complementares. Chamam-se arcos complementares dois arcos cuja somma algebraica é igual a 90° ou $\frac{\pi}{2}$.

Se um arco tem por medida a, seu complemento tem por medida $\frac{\pi}{2} - a$.

Toma-se por origem dos complementos o ponto B, situado a 90° da origem dos arcos, e consideram-se os complementos como positivos no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio. Com estas convenções, dois arcos complementares tendo por origens respectivas A e B terminam no mesmo ponto. Assim o arco AM tem por complemento BM; segundo que o arco AM é inferior ou superior a 90° , seu complemento BM é positivo ou negativo.



Fig. 9.

Observação. Para diante, a menos que os arcos considerados sejam os complementos de outros arcos dados, supporemos sempre, salvo indicações contrarias, que todos os arcos têm uma mesma origem A.

5. Arcos suplementares. Chamam-se arcos suplementares dois arcos cuja somma é igual a π .

Se um arco tem por medida a, seu suplemento tem por medida $\pi - a$.

Dois arcos suplementares de mesma origem A (fig. 10), são terminados em dois pontos M, M', situados sobre uma parallela ao diametro AA', e, por consequinte, symetricos um do outro em relação ao diametro BB'.



Fig. 10.

6. Formulas geraes de arcos tendo uma mesma origem e extremidades associadas.

1º Arcos que têm a mesma origem e a mesma extremidade.

Todos os arcos a tendo a mesma origem e a mesma extremidade estão comprehendidos na formula

$$a = 2k\pi + \alpha$$

α designando um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro qualquer positivo, negativo ou nullo.

Um arco a, do qual se conhece sómente a origem A e a extremidade M, não está bem determinado: é uma qualquer das direcções podendo conduzir um movel sobre a circumferencia, do ponto A ao ponto M.

Ora, é evidente que quando se conhece um qualquer d'esses arcos, α , d'elle podemos deduzir todos os outros: basta ajuntar a este um numero qualquer de circumferencias inteiras, positivas ou negativas, isto é, um arco $k \cdot 2\pi$, k indicando um numero inteiro qualquer, positivo ou negativo.

Por conseguinte todos os arcos de mesma origem e de mesma extremidade que o arco α estão comprehendidos na formula

$$a = 2k\pi + \alpha$$

o numero inteiro k podendo ser positivo, negativo ou nullo.

Observação. O arco α tendo por origem A e por extremo M, todo arco a da mesma origem e da mesma extremidade é a somma algebrica de dois arcos: um $2k\pi$, partindo da origem A, comprehendendo um numero inteiro de circumferencias, e tornando a trazer o movel ao ponto A; o outro, igual a α , que conduz depois o movel do ponto A ao ponto M.

3.º Arcos que têm a mesma origem, tendo seus extremos sobre uma mesma parrallela ao diametro que passa pela origem.

Todos os arcos a , tendo uma mesma origem e extremos collocados sobre uma mesma parrallela ao diametro que passa pela origem, estão comprehendidos nas duas fórmulas

$$a = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad a = (2k+1)\pi - \alpha \quad (E)$$

α designando um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.

Sejam A a origem commum e M, M' os extremos de uma corda parrallela ao diametro AA', isto é, dois pontos symetricos em relação ao diametro BB' (fig. 11).

Se o arco α se termina no ponto M, por exemplo, seu supplemento termina no ponto M' (n.º 5). Logo, em virtude da fórmula (D), todos os arcos terminados em M estão comprehendidos na fórmula

$$a = 2k\pi + \alpha$$

e todos os arcos terminados em M' estão comprehendidos na fórmula

$$a = 2k\pi + (\pi - \alpha)$$

ou

$$a = (2k+1)\pi - \alpha$$

k designando um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.



Fig. 11.

Observação. — Se α é um dos arcos terminados em M, todo arco terminando no ponto M' é a somma algebrica de dois arcos: um $(2k+1)\pi$, comprehendendo um numero impar de meias-circumferencias, e conduzindo da origem A ao ponto A' diametralmente opposto; o outro $-\alpha$ conduzindo d'esse ponto A' ao extremo M'.

4.º Arcos que têm a mesma origem, e os seus extremos sobre um mesmo diametro.

Todos os arcos a , tendo origem identica e extremos situados sobre o mesmo diametro, estão comprehendidos na fórmula

$$a = k\pi + \alpha$$

(F)

α indicando um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.

Sejam M, M' dois pontos diametralmente oppostos, isto é, dois pontos symetricos em relação ao centro do circulo trigonometrico (fig. 11).

Os arcos geometricos AM, A'M', sendo iguaes entre si, um arco α , indo do ponto A ao ponto M, poderá tambem conduzir do ponto A' ao ponto M'.

Assim, qualquer arco a , de origem A e terminado em um dos pontos M ou M', pôde ser considerado como sendo a somma algebrica de dois arcos: um, partindo da origem A, e terminando em A ou em A'; o outro, egual a α , conduzindo depois de A a M ou de A' a M'.

Ora, o primeiro d'esses arcos não pôde comprehender senão um numero inteiro de meias circumferencias positivas ou negativas; pôde ser representado por $k\pi$.

Por conseguinte qualquer arco a terminado em M ou em M' acha-se na formula

$$a = k\pi + \alpha$$

k indicando um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

4.º Arcos que têm a mesma origem, com seus extremos sobre a mesma perpendicular ao diametro que passa pela origem.

Todos os arcos a , tendo a mesma origem e extremidades sobre a mesma perpendicular ao diametro que passa pela origem, estão comprehendidos na fórmula:

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

α sendo um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

Sejam M, M'' os extremos de uma corda perpendicular a AA', isto é dois pontos symetricos em relação a esse diametro (fig. 11).

Os arcos geometricos AM, AM'' sendo iguaes, se um arco a se estende do ponto A ao ponto M, o arco $-\alpha$ ha de se estender do ponto A ao ponto M''.

Assim, todo arco A, tendo por origem A e por extremo um dos pontos M ou M'', pôde ser considerado como sendo a somma algebrica de dois arcos: um, partindo de A e voltando ao ponto A; o outro, egual a $+\alpha$ ou a $-\alpha$ e conduzindo do ponto A ao ponto M ou ao ponto M''.

Ora, o primeiro d'esses arcos não pôde ser senão um numero inteiro de circumferencias positivas ou negativas, isto é, um arco tendo de extensão $2k\pi$.

Por conseguinte todo o arco a terminado em M ou M'' acha-se comprehendido na fórmula

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

k indicando um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

§ II. — Das funções circulares.

As funções circulares, denominadas também *relações trigonométricas* ou *funções trigonométricas*, são seis, que vem a sêr o seno, a tangente, a secante, o coseno, a cotangente e a cosecante. Para abreviar os nomes, se escreve, \sin , \tan , \sec , \cos , \cot , \csc .

As funções circulares são medidas das partes que medem certos ângulos de recta, lineas e esse arco, quando se toma o raio do arco ou a unidade de comprimento.

As funções circulares de um ângulo são idênticas á do arco que tem a mesma medida que esse ângulo.

7. Relações trigonométricas. — Dado um ângulo AOM , de ver-

vesse do seu vértice como centro um círculo, resolva a qual elle intercepta um arco AM . Seja A a origem do arco AM e M seu extremo, tracemos OM e os diâmetros rectangulares AA' e BB' .

Chama-se *seno* de um arco a relação do raio d'este arco, OA , ao segmento MP da extremidade do diâmetro AA' que passa pela origem.

Assim, o seno do arco AM ou do ângulo AOM é a relação $\frac{MP}{OA}$.

Chama-se *tangente* de um arco a relação do raio OA ao segmento AT da tangente em M que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

Assim, a tangente do arco AM ou do ângulo AOM é a relação $\frac{AT}{OA}$.

Chama-se *secante* de um arco a relação do raio OA ao segmento OS da secante em M que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

Assim, a secante do arco AM ou do ângulo AOM é a relação $\frac{OS}{OA}$.

Chama-se *coseno* de um arco a relação do raio OA ao segmento OQ do diâmetro BB' que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

Assim, o coseno do arco AM ou do ângulo AOM é a relação $\frac{OQ}{OA}$, OQ sendo a perpendicular baixada da extremidade do arco sobre o diâmetro que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

Chama-se *cotangente* de um arco a relação do raio OA ao segmento OR da tangente em O que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

Assim, a cotangente do arco AM ou do ângulo AOM é a relação $\frac{OR}{OA}$, OR sendo a perpendicular baixada da extremidade do arco sobre a tangente em O que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

A cosecante do arco AM é a relação $\frac{OS}{OB}$, OS sendo a distancia do centro O ao ponto S da secante.

Linhas trigonométricas. — Convém dar-se uma vez por todas terminação ás linhas trigonométricas, e o raio OA de um círculo considerado. Portanto, as linhas trigonométricas do arco AM ou do ângulo AOM medem-se sempre em termos de OA . Esses números são os valores das funções trigonométricas.

As linhas trigonométricas podem ser substituídas pelas seguintes:

O seno é a metade do diâmetro perpendicular á extremidade do arco, e a tangente é a distancia do centro ao ponto T da tangente.

A tangente de um arco é a distancia do centro ao ponto T da tangente em M que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

A secante de um arco é a distancia do centro ao ponto S da secante em M que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

O coseno de um arco é a metade do diâmetro perpendicular á extremidade do arco, e a cotangente é a distancia do centro ao ponto R da tangente em O que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

A cotangente de um arco é a distancia do centro ao ponto R da tangente em O que passa pela origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

A cosecante é a distancia do centro á extremidade da cotangente.

Observação I. — O coseno, a cotangente e a cosecante de um arco, que não são mais do que o seno, a tangente e a secante do complemento d'esse arco, são denominados por essa razão linhas ou funções complementares.

Observação II. — O ponto A sendo a origem dos arcos e B a origem dos complementos, todos os senos são paralelos ao diâmetro BB' , e todos os cosenos são paralelos ao diâmetro AA' . Eis porque o diâmetro AA' chama-se eixo dos cosenos, e o BB' eixo dos senos.

As tangentes são paralelas ao eixo dos senos, e as cotangentes são paralelas ao eixo dos cosenos.

Observação III. — É util modificar as definições da secante e da cosecante, de modo que se possa contar também estas duas ultimas linhas sobre as direcções rectangulares OA , OB .

A tangente ao círculo traçada pela extremidade M do arco, encontra a direcção OA em um ponto T' e a direcção OB em um ponto S' .

Os triângulos iguais OAT , OMT e OBS , OMS transportam-se em OT' e a cosecante OS em OS' .

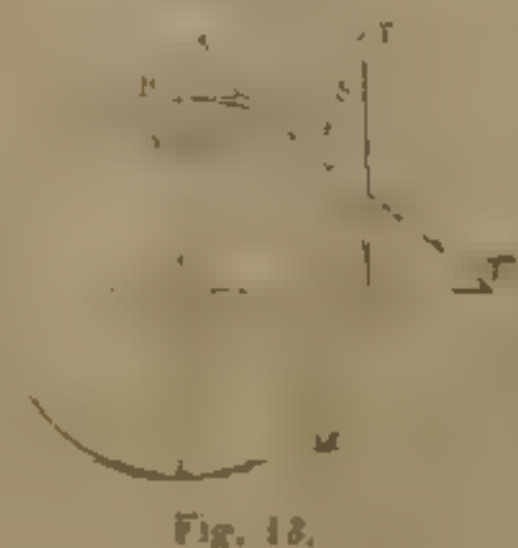


Fig. 12.

Assim, a *Secante* de um arco é a linha recta AA' , que se prolonga até ao ponto A' onde a linha perpendicular ao centro BB' encontra a circunferência, e a *cosecante* de um arco é a linha recta BB' , que se prolonga até ao ponto B' onde a linha perpendicular ao centro AA' encontra a circunferência.

8. As linhas trigonometricas de um arco em cada um dos quadrantes. — As linhas trigonometricas de um arco em cada um dos quadrantes são determinadas pelo sinal das suas partes.



Fig. 14.



Fig. 15.

trigonometricas de um arco $AM = a$, cuja extremidade M cahe successivamente no 1º, no 2º, no 3º e no 4º quadrante.

Temos $\text{sen } a = MP$, $\text{tg } a = AT$, $\text{sec } a = OT$ ou OT' ,
 $\text{cos } a = OP$, $\text{cot } a = BS$, $\text{cosec } a = OS$ ou OS' .

9. Signaes das linhas trigonometricas. — Toda linha trigonometrica sendo um segmento de recta perpendicular a um dos eixos rectangulares OA , OB , e tendo sua origem sobre esse eixo, attribue-se-lhe o signal $+$ ou o signal $-$ segundo as seguintes convenções geraes:

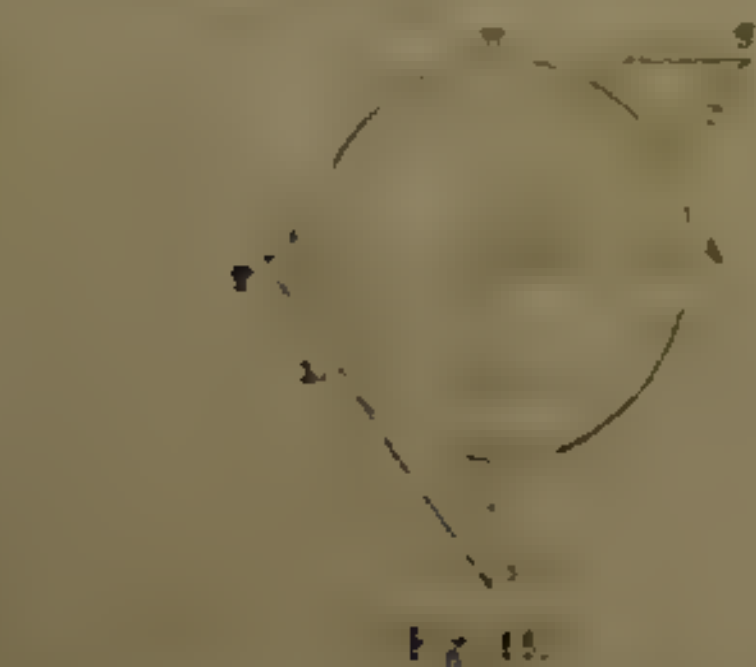


Fig. 16.

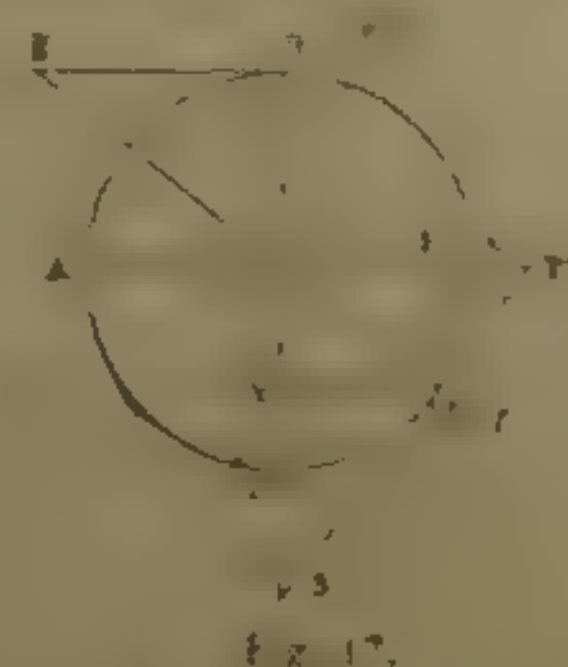


Fig. 17.

Toda segmento perpendicular ao eixo OB é $+$ se estiver á direita d'esse eixo e $-$ se estiver á esquerda.

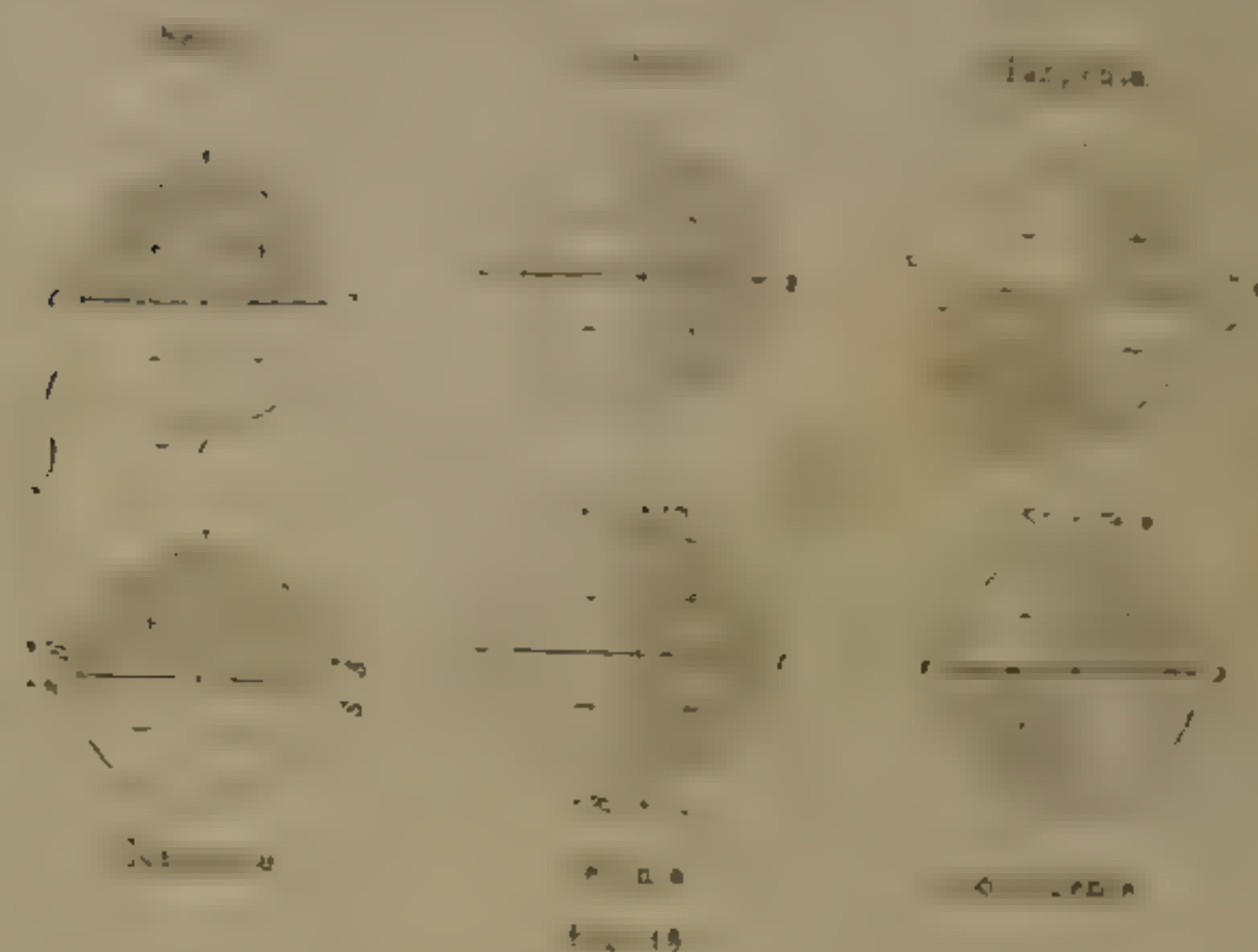
Toda segmento perpendicular ao eixo OA é $+$ se estiver acima d'esse eixo e $-$ se estiver abaixo.

Assim, o seno de um arco é positivo quando esse arco termina no 1º ou no 2º quadrante, e negativo quando o arco termina no 3º ou no 4º quadrante.

A tangente é positiva no 1º e no 3º quadrante, negativa no 2º e no 4º quadrante.

O coseno é positivo no 1º e no 4º quadrante, negativo no 2º e no 3º quadrante.

As secante e a cosecante são positivas no 1º e no 4º quadrante, e negativas no 2º e no 3º quadrante.



Observação I. Quando um arco acaba no 1º quadrante, suas linhas trigonometricas são todas positivas.

Observação II. Quando um arco acaba no 1º quadrante, suas linhas trigonometricas são todas positivas.

No 2º quadrante, todas as linhas são negativas, excepto o seno e a cosecante.

No 3º quadrante, todas as linhas são negativas, excepto a tangente e a cotangente.

No 4º quadrante, todas as linhas são negativas, excepto o coseno e a secante.

10. Theorema. As relações trigonometricas de um angulo são independentes do raio do circulo considerado (são determinadas logo que se conhece o angulo).

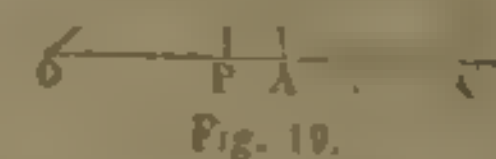


Fig. 19.

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'}$$

isto é

$$\frac{\sin a}{MP'} = \frac{\cos a}{OP'} = \frac{1}{R}$$

d'onde

$$\sin a = \frac{MP}{R} \text{ e } \cos a = \frac{OP}{R}$$

Por conseguinte, qualquer que seja o raio R , $\sin a$ é igual à razão $\frac{MP}{R}$, $\cos a$ é igual à razão $\frac{OP}{R}$.

§ III. Relações entre as linhas trigonometricas de certos eixos.

No circulo trigonometrico inscrevamos um rectangulo $MM'M''$, que tenha os lados parallellos aos diametros rectangulares AA' e BB' , isto é ao eixo dos cosenos e ao eixo dos senos. Um rectangulo d'esses póde ser denominado rectangulo trigonometrico.

terminados em cada um dos quatro vertiges M, M', M'', M''' , verifica se que as linhas que têm o mesmo nome são iguaes em valor absoluto. Entre as numerosas consequencias que decorrem d'esta observação, as seguintes são especialmente uteis a reter.

11. Arcos que differem de um numero inteiro de circumferencias, ou de um numero inteiro de circumferencias, terminam no mesmo ponto da circumferencia, e portanto, as suas linhas trigonometricas são iguaes.

Sejam o arco a e o numero inteiro k , podemos escrever:

$$\sin(a + 2k\pi) = \sin a, \quad \cos(a + 2k\pi) = \cos a, \\ \tan(a + 2k\pi) = \tan a, \quad \cot(a + 2k\pi) = \cot a$$

Assim, as linhas trigonometricas de dois arcos que differem de um numero inteiro de circumferencias, são iguaes em valor absoluto e têm o mesmo signal.

12. Arcos supplementares. Dois arcos supplementares AM, AM' , têm suas extremidades symetricas em relação ao diametro BB' , suas linhas trigonometricas são pois iguaes e de signaes contrarios, exceptuando o

mesmo signal. De modo que temos:

$$\sin(\pi - a) = \sin a, \quad \sec(\pi - a) = -\sec a, \\ \lg(\pi - a) = -\lg a, \quad \cotg(\pi - a) = -\cotg a.$$

Por conseguinte, se substituímos um arco por seu supplemento, as linhas trigonometricas conservam seu valor absoluto e mudam de signal, exceptuando o seno e a cosecante.

Nas applicações, frequentemente temos de nos lembrar, com o mesmo signal, porém cosenos iguaes com signaes contrarios.

13. Arcos que differem d'uma semi-circumferencia. Dois arcos AM e AM' que differem de uma semi-meia circumferencia têm suas extremidades diametralmente oppostas; suas linhas trigonometricas são pois iguaes e de signaes contrarios, exceptuando a tangente AT e a cotangente BS , que são iguaes.

Temos pois:

$$\sin(\pi + a) = -\sin a, \quad \operatorname{cosec}(\pi + a) = -\operatorname{cosec} a, \\ \cos(\pi + a) = -\cos a, \quad \sec(\pi + a) = -\sec a, \\ \lg(\pi + a) = \lg a, \quad \cotg(\pi + a) = \cotg a$$

Por conseguinte, se juntarmos ou tirarmos a um arco uma semi-circumferencia, as suas linhas trigonometricas conservam seu valor absoluto e mudam de signal, exceptuando a tangente e a cotangente.

14. Arcos iguaes com signaes contrarios. Dois arcos iguaes e com signaes contrarios, AM e AM' , têm suas extremidades symetricas em relação ao diametro AA' , suas linhas trigonometricas são pois iguaes em valor absoluto e com signaes contrarios, exceptuando o coseno OP e a secante $OT = OT'$, que são iguaes e têm o mesmo signal.

Assim póde-se escrever:

$$\sin(-a) = -\sin a, \quad \cos(-a) = \cos a, \\ \lg(-a) = -\lg a, \quad \cotg(-a) = -\cotg a.$$

Por conseguinte, se mudarmos o signal de um arco, as linhas trigonometricas conservam seu valor absoluto e mudam de signal, exceptuando o coseno e a secante.

Observação. À vista do que precede, podemos concluir, que para qualquer arco, existe

sempre um arco do primeiro quadrante e só um, tendo as mesmas linhas trigonometricas que elle, em valor absoluto.

Assim, abstracção feita dos signaes, poderiamos conhecer todos os valores de que são susceptíveis; do modo que se conhecemos as linhas trigonometricas de todos os arcos comprehendidos entre 0° e 90° , d'ellas poderiamos deduzir os valores e os signaes das linhas trigonometricas de todos os outros arcos.

13. Reduzir um arco ao primeiro qua-
drante.

Reduzir um arco ao primeiro quadrante, é achar
trigonometricas são iguaes em valor absoluto do
arco dado.

Para reduzir ao primeiro quadrante um arco dado a , se esse arco excede 360° , divide-se primeiramente por 360; o que dá um quociente inteiro q e um resto a inferior a 360.

O quociente indica quantas circumferencias inteiras encerra o arco dado; o resto mostra em que quadrante esse arco termina e, por consequencia, com que signaes estão affectas suas linhas trigonometricas.

Se α é um arco do 2º quadrante, diminui-se de π : a diferença $\pi - \alpha$ é o arco que se procura.

Se α é um arco do 3º quadrante, tira-se-lhe π : o excesso $\alpha - \pi$ responde

Se α é um arco do 4º quadrante, diminua-se de 2π : a diferença

Exemplos. — 1.º

For simplicity, note that \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 are disjoint, and $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$.
 For \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , and \mathcal{S} , $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$, $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$.

46 Arcos que differem de $\frac{\pi}{2}$.

Para obter as funções trigonométricas do arco $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$ em função

das do arco a , basta exprimi-las primeiramente em função das linhas trigonométricas do arco $(-a)$, e depois substituir estas em função das do arco a .

Os arcos $\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$ e $(-a)$ sendo complementares, temos sucessivamente: $u^{\circ} 7$ e 16 ;

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-a)=\cos a$$

$$\cos \left(a + \frac{\pi}{2} \right) = \sin (-a) = -\sin a$$

$$= \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a, \text{ etc.}$$

Por conseguinte, se dois arcos differem de $\frac{\pi}{2}$, as linhas trigonometricas de um são iguaes em valor, e de sinal contrario, a dos outros tres. E esses valores iguaes têm sinais contrarios, excepto o seno e a cossecante do maior arco e o coseno e a secante do menor, que são quatro linhas trigonometricas com o mesmo signal.

§ IV. — Variações das linhas trigonometricas.

Estudemos as variações de cada uma das linhas trigonometricas do arco a quando elle passa, crescendo, por todos os estados de grandeza.

Supponhamos que esse arco é gerado por um móvel M que descreve a circunferência no sentido positivo.

Todas as vezes que esse movel passa no mesmo ponto da circumferencia, as seis linhas trigonometricas do arco retomam os mesmos valores (nº 11).

A cada volta de circunferencia, as seis linhas trigonometricas tornam a tomar quatro vezes os mesmos valores absolutos, para as quatro posições do ponto M situadas nos vertice do mesmo rectangulo trigonometrico (fig. 20).

17. Seno e coseno.

Variações do seno. — Se a extremidade do arco parte da origem e, indo no sentido positivo, descreve os quatro quadrantes,

No 2º quadrante, o seno decresce de $+1$ a 0 , retomando em sentido inverso todos os valores precedentes.

3º quadrante, o seno torna-se negativo e decresce de 0 a -1 .

4º quadrante, o seno fica negativo e cresce de -1 a 0 .

Para duas rectas M equidistantes do ponto A ou do ponto A' , os sinais são iguaes e de signaes contrarios.

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

Cada vez que a extremidade do arco, passando por O, e toma duas vezes cada um dos valores compreendidos entre seu minimo e seu maximo. *Periodicidade* — O seno não muda quando se ajunta ou se tira qualquer numero inteiro de 2π a circumferencias, temos

$$\sin(a + 2k\pi) = \sin a.$$

Logo, o seno é uma função periódica do arco, e a amplitude do seu período é 2π (nº XXII).

Curva figurativa das variações do seno. — Sobre dois eixos rectangulares Ox e Oy, tomamos o ponto O como origem.

Por exemplo, desenvolvendo o arco OM obtem-se a abscissa OM', e seu seno PM dá a ordenada correspondente MS = PM.

Quando o ponto M desloca-se sobre a circumferencia, o ponto M' desloca-se sobre o eixo Ox, e o ponto S gera a curva figurativa das variações do seno. Essa curva se prolonga indefinidamente nos dois sentidos da recta Oy.

Fig. 22. — Variações do seno.

que ella corta em uma infinidade de pontos equidistantes; a curva é symetrica em relação a cada um dos pontos situados sobre Ox e em relação a cada uma das rectas passando pelas ordenadas maximas e minimas.

2º Variações do coseno. — Se a extremidade do arco parte da origem e descreve, no sentido positivo, cada um dos quadrantes:

No 1º quadrante, a extremidade M desloca-se de A para B, e o coseno varia de 1 para 0.

No 2º quadrante, o coseno decresce de 0 a -1.

No 3º e no 4º quadrante, o coseno primeiramente cresce de -1 a 0, e depois de 0 a +1; retomando assim, em ordem inversa, todos os valores decrescentes no 2º e no 1º quadrante.

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto A ou do ponto B, os cosenos são iguaes e de signaes contrarios.

Para duas posições diametralmente oppostas do ponto M, os cosenos são iguaes e têm o mesmo signal.

A cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade M, o coseno passa duas vezes seguidas pela serie completa dos valores de -1 a +1.

Periodicidade do coseno. — Qualquer que seja o valor do arco a, temos para todo valor do numero inteiro k

$$\cos(a + 2k\pi) = \cos a.$$

CAPITULO I. — LINHAS TRIGONOMETRICAS.

Logo, o coseno é uma função periódica do arco, e a amplitude de seu período é igual a 2π (nº XXII).

Para obter a curva figurativa das variações do coseno, tomamos para abscissas os complementos dos arcos e para ordenadas os valores correspondentes do coseno.



Fig. 23. — Variações do coseno.

A curva que passa pelas extremidades de todas as ordenadas, asinhibidas, representa as variações do coseno.

1º Tangente e cotangente.

1º Variações da tangente. — Se a extremidade do arco parte da origem e descreve a circumferencia no sentido positivo:

No 1º quadrante, a tangente é positiva, ella parte de 0 e aumenta indefinidamente. Quando o arco a tende para $\frac{\pi}{2}$ com valores crescentes, sua tangente tende para $+\infty$.

No 2º quadrante a tangente é negativa; ella retoma os mesmos valores absolutos em ordem inversa; assim, ella cresce de $-\infty$ a 0. Vemos que quando a extremidade M passa por B, seguindo o sentido positivo, a tangente passa de $+\infty$ a $-\infty$.

No 4º assim como no 2º, a tangente cresce de $-\infty$ a 0.

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto B ou do ponto B', as tangentes são iguaes e de signaes contrarios.

Para duas posições diametralmente oppostas do ponto M, as tangentes são iguaes e têm o mesmo signal.

A cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade M, a tangente passa duas vezes seguidas pela serie completa dos valores de $-\infty$ a $+\infty$.

Periodicidade da tangente. — A tangente de um arco não muda quando se ajunta ou se tira a esse arco um numero inteiro de semi-circumferencias.

$$\text{Temos} \quad \text{tg}(a + k\pi) = \text{tg } a$$

Logo, a tangente é uma função periódica do arco, e a amplitude de seu período é igual a π (nº XXII).

2º Variações da cotangente.

No 1º quadrante, a cotangente decresce de $+\infty$ a 0.

No 2º quadrante, ella decresce de 0 a $-\infty$.

No 3º quadrante, ella decresce, como no 1º, de $+\infty$ a 0.

No 4º quadrante, como no 2º, ella decresce de 0 a $-\infty$.

De cada vez que a extremidade do arco dá a volta da circumferencia,

passa duas vezes pela serie dos valores de $-\infty$ a $+\infty$; e duas vezes do signaes passando quer por 0, quer pelo $+\infty$; emfim ella não admite nem maximo nem minimo.

$$\operatorname{colg}(a + k\pi) = \operatorname{colg} a$$

Curvas figurativas das variações da tangente e da cotangente.

As variações da tangente e da cotangente são representadas pelas figuras seguintes.

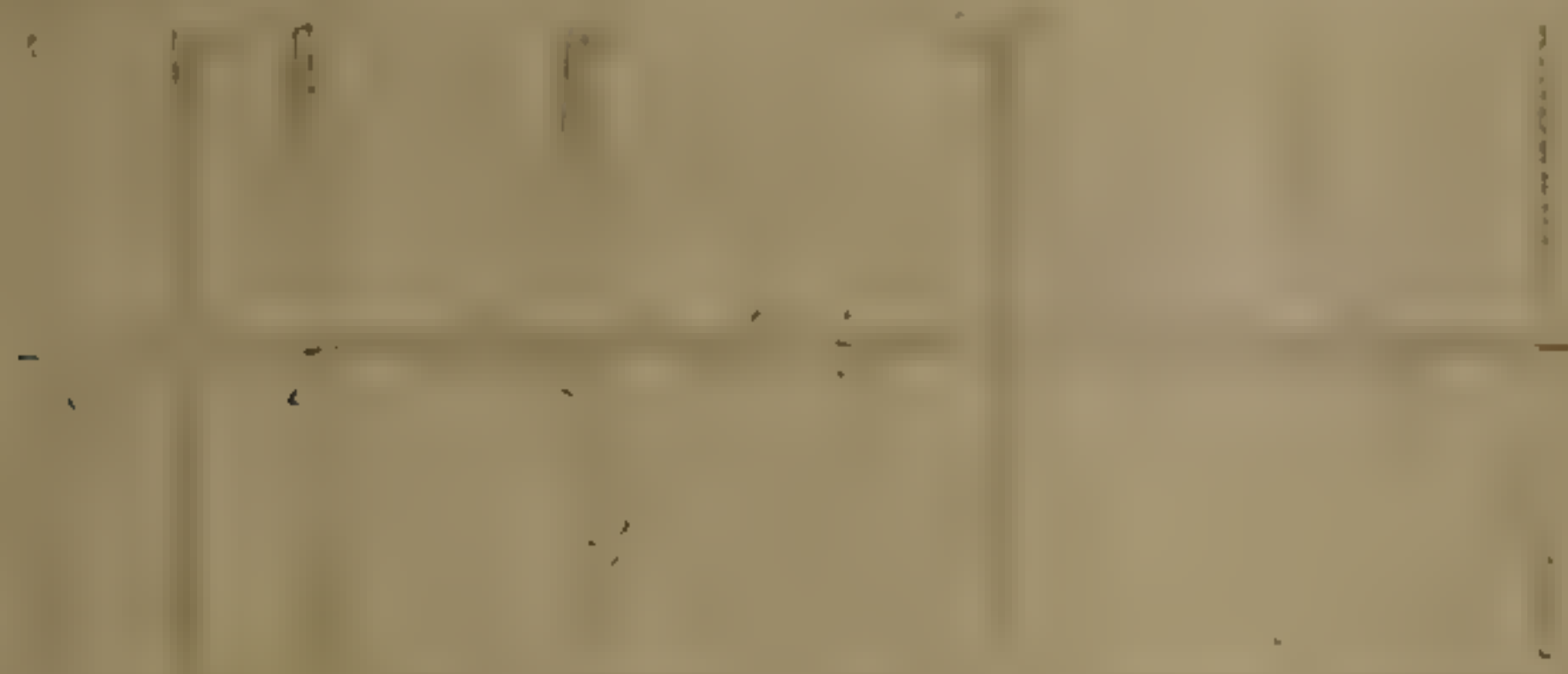


Fig. 26. — Variações da tangente.

Fig. 27. — Variações da cotangente.

19. Secante e cosecante.

Para seguir facilmente as variações d'estas duas linhas trigonometricas, basta lembrar-se que a secante e a cosecante são os segmentos OT' e OS' interceptados sobre os eixos rectangulares OA, OB pela tangente ao circulo trigonometrico, cujo ponto de contacto coincide com a extremidade do arco. Quando esse ponto M descreve a circumferencia, a tangente TS' gira sobre o circulo, e os pontos T', S', movem-se sobre os eixos.

1.ª Variações da secante.

No 1.º quadrante, a secante cresce de $+1$ a $+\infty$.

No 2.º quadrante, a secante decresce de $-\infty$ a -1 .

No 3.º quadrante, a secante cresce de -1 a $+\infty$.

No 4.º quadrante, a secante decresce de $+\infty$ a -1 .

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto A ou do ponto A', as secantes são iguaes.

Para duas posições de M equidistantes do ponto B ou do ponto B', as secantes são iguaes e de signaes contrarios.

A cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade M, a secante muda duas vezes de signaes passando pelo infinito, e toma duas vezes todo valor não comprehendido entre -1 e $+1$.

2.ª Variações da cosecante.

No 1.º quadrante, a cosecante decresce de $+\infty$ a $+1$.

No 2.º quadrante, ella cresce de $+1$ a $+\infty$.

No 3.º quadrante, ella cresce de $-\infty$ a -1 .

No 4.º quadrante, ella decresce de -1 a $-\infty$.

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto B ou do ponto B', as cosecantes são iguaes.

Para duas posições de M equidistantes do ponto A ou do ponto A', as cosecantes são iguaes e de signaes contrarios.

A cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade M, a cosecante muda duas vezes de signaes passando pelo infinito, e toma duas vezes todo valor não comprehendido entre -1 e $+1$.

Periodicidade da secante e da cosecante.

$$\sec(a + 2k\pi) = \sec a \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec}(a + 2k\pi) = \operatorname{cosec} a.$$

Por conseguinte, a secante e a cosecante são funções periodicas do arco, e a amplitude de cada periodo é 2π .

As variações da secante e da cosecante são representadas pelas curvas seguintes:

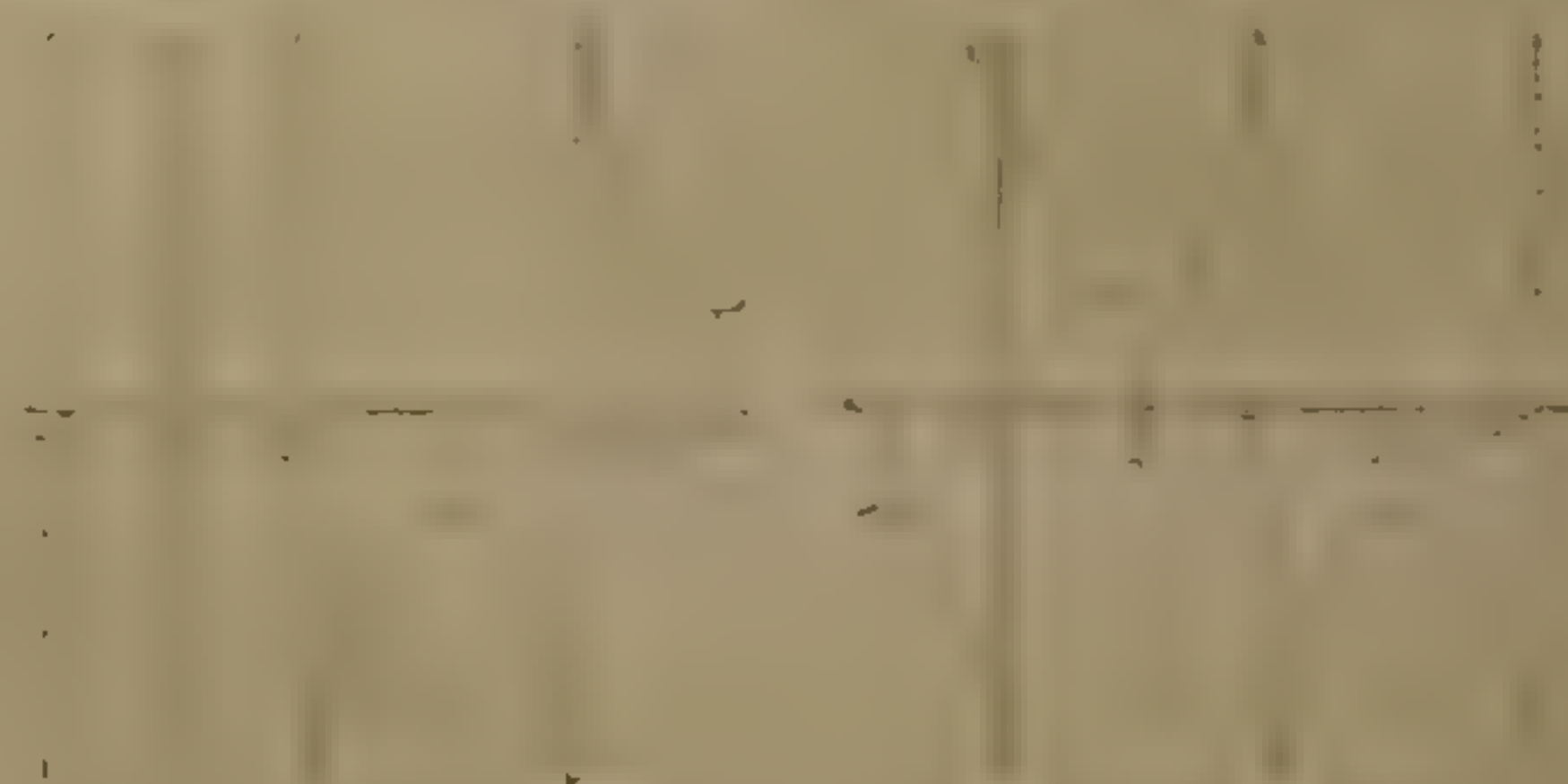


Fig. 28. — Variações da secante.

Fig. 29. — Variações da cosecante.

Resumo. — O quadro seguinte indica o valor das seis linhas trigonometricas para cada um dos angulos.

e o sentido de variação de cada uma d'essas linhas nos quatro quadrantes.

Arco	1.º Quadrante	2.º Quadrante	3.º Quadrante	4.º Quadrante
Sen	+	+	+	+
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	+	-
Cosec	+	+	-	-

Observação. — Resulta do que precede :

1.º

Se não se acham comprehendidos entre -1 e $+1$ e que
nem seno ou uma cosecante.

do intervalo de -1 a $+1$ são os únicos que

§ V. — Arcos tendo uma linha trigonometrica dada.

Um arco dado só tem uma linha trigonometrica de cada especie; pelo contrario, a uma linha trigonometrica dada corresponde um numero indefinido de arcos.

Propoemo-nos exprimir, em funcção de um d'entre elles, todos os arcos tendo uma linha trigonometrica dada.

Deduziremos depois, das formulas obtidas, as condições para que dois arcos tenham senos iguaes, ou cosenos iguaes, ou tangentes iguaes, etc.

20. Fórmulas dos arcos tendo um seno dado ou uma cosecante dada. — Tomemos sobre o eixo do seno BB' um segmento OII igual em grandeza e em signal ao seno dado; depois, pelo ponto II, tracemos a corda MM' paralela ao diametro AA'. E evidente que todos os arcos terminados em M ou em M' têm por seno OII, e que são os unicos.

$$a = 2k\pi + \alpha \text{ e } a = (2k+1)\pi - \alpha \quad (E)$$

1.º Arcos tendo um seno dado. — Tomemos sobre o eixo do seno BB' um segmento OII igual em grandeza e em signal ao seno dado; depois, pelo ponto II, tracemos a corda MM' paralela ao diametro AA'.

E evidente que todos os arcos terminados em M ou em M' têm por seno OII, e que são os unicos.

Assim todos os arcos que têm o mesmo seno dado terminam sobre uma recta paralela ao diame-

tro AA'.

Logo, se designarmos um d'esses arcos por α , todos os arcos que têm o mesmo seno dado estão compreendidos na formula (E).

2.º Arcos tendo uma cosecante dada. — Tomemos sobre o eixo da cosecante BB' um segmento OII igual em grandeza e em signal à cosecante dada; depois, pelo ponto II, tracemos a corda MM' paralela ao diametro AA'. E evidente que todos os arcos terminados em M ou em M' têm por cosecante OII, e que são os unicos.

Assim todos os arcos que têm a mesma cosecante dada terminam sobre uma recta paralela ao diametro AA'. Logo, se designarmos um d'esses arcos por α , todos os arcos que têm a mesma cosecante dada estão compreendidos na formula (F).

Esses pontos M e M' são symetricos em relação ao diametro BB'. Logo

(n.º 6, 2.º), todos os arcos a tendo a cosecante dada se acham comprehendidos nas formulas (F), nas quaes α designa um qualquer d'esses arcos.

Condição para que dois arcos tenham senos eguaes.

Para que dois arcos tenham senos iguaes, e por consequente cosecantes iguaes, é preciso e sufficiente que sua differença seja um numero par ou que summa seja um numero impar de semi-circunferencias.

Com effeito, para que dois arcos a e a tenham o mesmo seno ou a mesma cosecante, é preciso e sufficiente que elles satisfaçam a uma das formulas (E), isto é que tenham

$$a - a = 2k\pi \text{ ou então } a + a = (2k+1)\pi$$

21. Formula dos arcos tendo uma tangente ou uma cotangente dada. — Todos os arcos tendo uma tangente ou uma cotangente dada acham-se comprehendidos na formula

$$a = k\pi + \alpha \quad (F)$$

na qual α designa um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro qualquer, nullo ou negativo.

1.º Arcos tendo uma tangente dada. — Tomemos sobre a tangente em A um segmento AT igual em grandeza e em signal à tangente dada; depois tiremos a recta OT que encontra a circumferencia em M e em M'. E' evidente que todos os arcos terminados em M ou em M' têm por tangente OT, e que são os unicos.

Assim, todos os arcos que têm a mesma tangente dada terminam sobre o mesmo diametro.

Logo (n.º 6, 3.º), se designarmos um d'esses arcos por α , todos se acham comprehendidos na formula (F) na qual k representa um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

2.º Arcos tendo a mesma cotangente. — Tomemos sobre a tangente em B um segmento BS igual em grandeza e signal à cotangente dada; depois tracemos a recta OS, que corta a circumferencia em M e em M'. Todos os arcos que têm a cotangente dada estão pois terminados sobre o mesmo diametro BB'. Logo, se designarmos um d'esses arcos por α , todos se acham comprehendidos na formula (F).

Condição para que dois arcos tenham tangentes iguaes.

Para que dois arcos tenham tangentes iguaes, e por consequente cotangentes iguaes, é preciso e sufficiente que a sua differença seja um numero inteiro qualquer de semi-circunferencias.

Com effeito, para que dois arcos a e a tenham a mesma tangente ou a mesma cotangente, é preciso e sufficiente que satisfaçam á formula (F), isto é, que tenhamos $a - a = k\pi$.



22 Fórmula dos arcos tendo um coseno dado ou uma secante dada. — Todos os arcos de uma circunferência cujos cosenos ou secantes dadas estão comprehendidos na fórmula

$$\alpha = 2k\pi \pm \alpha \quad (G)$$

designando um qualquer número inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.

1º Arcos tendo um coseno dado. — Tomemos sobre o eixo horizontal AA' uma recta perpendicular ao diametro BB'. Depois tiremos pelo ponto P a corda MM' paralela ao diametro BB'. E' evidente que todos os arcos terminados em M e em M' têm por coseno OP, e que são os unicos.

Assim, todos os arcos que têm um coseno dado terminam sobre uma recta perpendicular ao diametro AA'.

Fig. 23

Portanto (nº 6, 4º), se designarmos um d'esses arcos por α , todos estão comprehendidos na fórmula (G) na qual k representa um numero inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.

2º Arcos tendo uma secante dada. — Tomemos sobre o eixo horizontal AA' um segmento OS igual em grandeza e em signal á secante dada; depois tiremos as tangentes SM, SM'. Todos os arcos terminados em M ou M' têm por secante OS, e são elles os unicos.

Tomemos sobre o eixo horizontal AA' um segmento OS' igual em grandeza e em signal á secante dada; depois tiremos a circumferencia descrita do centro O com OS' como raio; as rectas SM, SM' e OS' se intersectam em T.

Os pontos M e M' são symetricos em relação ao diametro AA'.

Portanto (nº 6, 4º), dois arcos α e α tendo a secante dada satisfazem á fórmula (G).

Condição para que dois arcos tenham cosenos iguaes.

Para que dois arcos tenham cosenos iguaes, é preciso que os seus terminos estejam sobre uma recta perpendicular ao diametro AA'.

Logo, se dois arcos α e β têm cosenos iguaes, os seus terminos M e M' estão sobre uma recta perpendicular ao diametro AA'.

$$\alpha = 2k\pi \pm \beta$$

Funções circulares inversas. — As linhas trigonometricas de um arco são a medida desse arco. Inversamente, o arco que se encontra sobre uma circunferencia de raio unitario de suas linhas trigonometricas. Semente, ao passo que um arco dado corresponde a uma unica linha

trigonometrica de cada especie; pelo contrario, a uma linha trigonometrica dada corresponde uma infinidade de arcos.

Sendo $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \lg x$

as funções inversas escrevem-se respectivamente

$$x = \arcsin y, \quad x = \arccos y, \quad x = \operatorname{arctg} y$$

Nenhuma d'essas funções está completamente definida; cada uma d'ellas admite uma infinidade de determinações diferentes; para só conservar porém, um unico valor da primeira função, por exemplo basta sujeitar o arco x a ficar incluído entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$; para conservar somente um unico valor da segunda função, basta especificar que o arco x está comprehendido entre 0 e π .

Os autores inglezes costumam empregar em vez das notações:

$$x = \operatorname{sen}^{-1} y; \quad x = \operatorname{cos}^{-1} y; \dots$$

as seguintes

$$x = \operatorname{sen}^{-1} y; \quad x = \operatorname{cos}^{-1} y; \dots$$

Exercícios

1º. Calcular o seno de $\frac{7\pi}{8}$ e o suplemento de $\frac{13\pi}{30}$.

Substituindo π por seu valor 180° , temos

$$\frac{3\pi}{8} = \frac{3 \times 180}{8} = 67^\circ 30'$$

O complemento de $\frac{7\pi}{8}$ é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} - \frac{7\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} = -67^\circ 30'$$

O suplemento de $\frac{13\pi}{30}$ é

$$\pi - \frac{13\pi}{30} = \frac{17\pi}{30} = 102^\circ$$

2º Sabendo que $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, calcular o seno de cada um dos arcos 150° , 210° , e 330° .

Temos $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$; logo $\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$

$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$; logo $\operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$; logo $\operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$

2º $\frac{\pi}{2}$ e do primeiro quadrante o arco 135° .

1º

$$180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$$

Portanto o arco dado encerra 3 circunferencias inteiras; elle termina no 2º quadrante, e o seu valor absoluto é o mesmo dos valores absolutos que as de 86° .

4º Actar os arcos x que verifiquem a igualdade

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 13^\circ$$

O arcos tem?

$$x = 2k\pi + 13^\circ \text{ e } x = (2k+1)\pi - 13^\circ.$$

1º $\frac{\pi}{2}$ e do primeiro quadrante o arco 135° .

$$x = k\pi + (-1)^k 13^\circ$$

2º $\frac{\pi}{2}$ e do primeiro quadrante o arco 135° .

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 30^\circ$$

Os arcos tendo a mesma tangente que 30° estão comprehendidos na fórmula $x = k\pi + 30^\circ = k\pi + \frac{\pi}{6} = (6k+1)\frac{\pi}{6}$

3º $\frac{\pi}{2}$ e do primeiro quadrante o arco 135° .

Todos os arcos x tendo o mesmo coseno que 45° estão comprehendidos na fórmula $x = 2k\pi \pm 45^\circ = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} = (8k \pm 1)\frac{\pi}{4}$

4º $\frac{\pi}{2}$ e do primeiro quadrante o arco 135° .
valores absolutos do arco a .

Todos esses arcos x , terminados em um ou em outro dos quatro vertices do mesmo rectangulo trigonometrico, estão comprehendidos na fórmula

seja $x = \frac{k\pi}{7}$, quando se attri-

buir a k os valores $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$

metrigo as extremidades de todos

os arcos $\frac{k\pi}{7}$ e $\frac{(k+1)\pi}{7}$; e, em a circumferencia, a partir da

origem AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

em 12.º quadrante, e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

na extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA' e da extremidade AA'

$$\operatorname{tg} \frac{k\pi}{2} = \operatorname{tg} \frac{k'\pi}{2}$$

onde k e k' são números inteiros quaisquer.

$$\frac{k\pi}{2} = n\pi + \frac{k'\pi}{2}$$

onde n sendo um numero inteiro qualquer.

4

CAPITULO II

FÓRMULAS TRIGONOMETRICAS

§ 1. — Relações entre as linhas trigonometricas de um mesmo arco.

23. Fórmulas fundamentais. — Entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, existem 5 relações distintas que se deduzem da geometria.

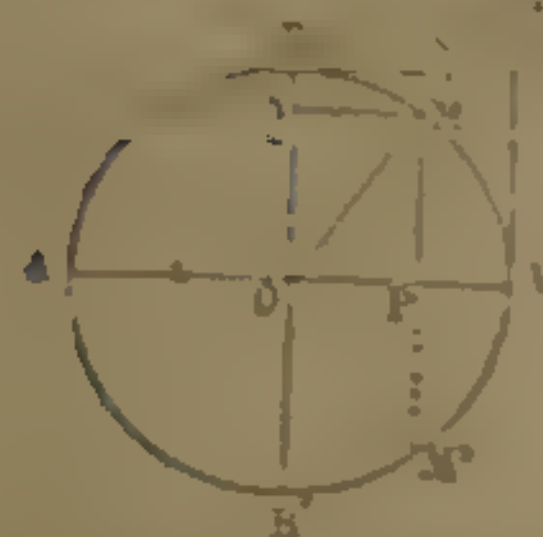


Fig. 34.

Seja $AM = a$ um arco do primeiro quadrante. Tracemos suas seis linhas trigonometricas.

O triângulo rectângulo OMP dá

$$MP^2 + OP^2 = OM^2$$

$$\text{ou} \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad (1)$$

Os triângulos semelhantes OAT, OPM dão

$$\frac{AT}{PM} = \frac{OA}{OP} = \frac{OT}{OM}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a} = \frac{\sec a}{1}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad (2)$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \quad (3)$$

Os triângulos semelhantes OAT, OPM permitem que se escreva

$$\frac{AT}{PM} = \frac{OA}{OP} = \frac{OT}{OM}$$

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a} = \frac{\sec a}{1}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad (4)$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \quad (5)$$

24. Generalisação das fórmulas fundamentais. — Supponhamos o arco AM no primeiro quadrante; mas verifica-se facilmente que

as cinco fórmulas fundamentais são verdadeiras para um arco qualquer. Isto é evidente, qualquer que seja este arco, existe sempre um arco do primeiro quadrante tendo as mesmas linhas trigonometricas em valor absoluto (nº 15); basta pois verificar os signaes.

Ora, a fórmula (1) não encerrando senão quadrados, que são sempre essencialmente positivas, é sempre satisfeita.

A tangente e a cotangente são positivas no primeiro e terceiro quadrante, e negativas nos outros dois; é esse resultado que dão as fórmulas (2) e (4), pois o seno e o coseno são do mesmo signal no primeiro e no terceiro quadrante, e de signaes contrarios nos outros dois.

Emfim as fórmulas (3) e (5) são também geraes, visto que a secante é sempre de mesmo signal que o coseno, e a cosecante de mesmo signal que o seno (nº 9).

25. Fórmulas que se deduzem. — Combinando entre si as fórmulas fundamentais, podemos estabelecer muitas mais relações entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco. D'este modo:

1º Multiplicando membro a membro as fórmulas (2) e (4),

$$\text{obtemos} \quad \operatorname{tg} a \cotg a = 1$$

$$\text{ou} \quad \cotg a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

Em virtude d'essa relação e das fórmulas (3) e (5), a cotangente de um arco é o inverso da tangente, a secante é o inverso do coseno, a cosecante é o inverso do seno.

Esta observação é importantissima, porque em grande numero de problemas relativos ás seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, permite-nos considerar exclusivamente o seno, o coseno e a tangente; as outras tres linhas podem ser consideradas como conhecidas desde que possuímos as suas inversas.

2º Dividindo os dois membros da fórmula (1) por $\cos^2 a$,

$$\text{temos:} \quad \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}$$

isto é, tendo em conta as fórmulas (2) e (3),

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a$$

Dividindo os dois membros de (1) por $\sin^2 a$, teríamos

$$1 + \cotg^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$$

3º Substituindo $\cos a$ e $\sin a$ por seus inversos, as fórmulas (2) e (3) ficam sendo

$$\operatorname{tg} a = \sin a \sec a$$

$$\cotg a = \cos a \operatorname{cosec} a$$

Observação. Por meio de considerações geometricas pode-se tambem estabelecer, entre as linhas trigonometricas de um mesmo arco, relações diferentes de (1, 2, 3, 4, 5). Por exemplo, os triangulos

$$e \quad 1 + \cot^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$$

Porém essas relações, assim como todas aquellas que se podem obter de qualquer maneira entre as linhas trigonometricas de um mesmo arco, podem se deduzir das cinco formulas fundamentais. É o que resulta do theorema seguinte :

26. Theorema. Entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, existem cinco relações distintas e somente cinco.

1ª *Das cinco relações distintas.* Effectivamente, as cinco formulas fundamentais, cada uma das quatro ultimas contem uma linha trigonometrica que não figura em nenhuma outra.

Demais, a uma linha trigonometrica dada correspondem arcos que têm suas extremidades em dois pontos somente, nº 20 e seguintes; as outras cinco linhas trigonometricas d'esses arcos estão pois determinadas e deve-se poder calculal-as em função da primeira. Ora, para determinar unicamente cinco incognitas, é preciso cinco equações. Logo, entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, existem cinco relações distintas.

Se, portanto, se dá uma das seis linhas trigonometricas, e se quer achar as outras cinco, não se teria tirado para as seis linhas trigonometricas valores determinados e independentes do arco. O que é impossivel.

27. Expressão das linhas trigonometricas de um arco em função de uma d'ellas. Por meio das cinco formulas fundamentais, podemos expressar as cinco linhas trigonometricas em função de uma d'ellas.

Levando-se em consideração o seno, o coseno, e a tangente, visto que as outras tres linhas são conhecidas ao mesmo tempo que suas inversas

1ª Calcular $\cos a$ e $\operatorname{tg} a$ em função de $\sin a$.

Atendendo a (1) e (2) temos

$$\cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

e a fórmula (2) dá

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

Facilmente se comprehenderá os duplos signaes: O seno, 1.º, determina uma infinidade de arcos, que terminam em dois pontos M, M', sym-

tricos em relação ao diametro BB'. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M' têm cosenos iguaes e signaes contrarios. Logo, sendo dado $\sin a$, o arco a pode terminar indifferenteemente em M, ou em M', de modo que o valor de $\sin a$ e o de $\operatorname{tg} a$ são determinados em valor absoluto, mas não em signal.

28. 2ª Calcular $\sin a$ e $\operatorname{tg} a$ em função de $\cos a$. Obtem-se do mesmo modo.

$$\sin a = \pm \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

O coseno dado determina uma infinidade de arcos que terminam em dois pontos M, M', symetricos em relação ao diametro AA'. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M' têm senos iguaes e signaes contrarios, tangentes iguaes e signaes contrarios. Portanto, o arco a sendo um ou outro d'esses arcos, o valor de $\sin a$ e o de $\operatorname{tg} a$ não são determinados senão em valor absoluto.

29. 3ª Calcular $\sin a$ e $\cos a$ em função de $\operatorname{tg} a$. As incognitas são determinadas pelo systema das duas equações

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad (2)$$

Eliminemos $\sin a$ por substituição. A equação (2) pôde se escrever

A equação (1) fica sendo

$$\cos^2 a (\operatorname{tg}^2 a + 1) = 1$$

$$\text{D'ella se deduz} \quad \cos a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \quad (6)$$

Levando em conta este resultado, a equação (2) dá

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \quad (7)$$

Nas fórmulas (6) e (7) os signaes + correspondem-se, assim como os signaes -; pois cada valor de $\cos a$ dá um unico valor de $\sin a$. Não se pôde associar os dois valores de $\cos a$ com cada um dos valores de $\sin a$, e o systema (1, 2) só admittre duas soluções.

Observação. O systema das equações (1) e (2) pôde ser resolvido da seguinte maneira.

Multiplicando (2) por (1) e elevando ao quadrado, obtem-se

$$\frac{\sin a}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{1}$$

Eleve os dois membros ao quadrado, ajuntemos depois as fracções termo a termo. Vem, attendendo-se á equação (1):

$$\frac{\sin^2 a}{1} - \frac{\cos^2 a}{1} = \frac{1}{1}$$

do que se deduz

$$\sin a = \pm \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

Associando cada valor do seno a cada valor do cosseno obtêm-se quatro soluções que satisfazem ás equações (1). A equação (2) é equivalente ao proposto, pois elevando ao quadrado a equação (a) introduzimos as soluções da equação estranha

$$\frac{\sin a}{\cos a} = -\operatorname{tg} a.$$

Para escolher, entre as quatro soluções, aquellas que convêm ás equações 1. e 2., as arcos correspondentes de $\sin a$ e de $\cos a$ devem ter por quociente $+\operatorname{tg} a$. Só se consegue este resultado tomando o mesmo signal diante dos dois radicaes



Fig. 13.

30. Explicação dos duplos signaes. A tangente dada determina uma infinidade de arcos, terminados em dois pontos M, M' diametralmente oppostos. Ora, os arcos terminados em M e os que terminam em M' têm senos iguaes e de signaes contrarios, cosenos iguaes e de signaes contrarios. Logo, a designando um qualquer

d'esses arcos, $\sin a$ e $\cos a$ só se acham determinados em valor absoluto.

Exatamente da mesma maneira se deduzem os arcos x ao mesmo tempo que a sua tangente; poder-se-hia então saber em que quadrante se achasse o arco, e d'ahi deduzir o signal da tangente e do cosseno.



Fig. 14.

31. Calculo das linhas trigonometricas de alguns arcos. O seno MP de um arco AM é a metade da corda MM' que subtende o arco AM.

Por consequente, o lado de qualquer polygono regular é o duplo do seno da metade do angulo ao centro, e o apothema d'esse polygono é o cosseno do mesmo ângulo.

Sejam c e a o lado e o apothema de um polygono regular de n lados inscripto no círculo de raio 1. O angulo no centro d'esse polygono sendo $\frac{2\pi}{n}$, temos

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{c}{2} \quad \text{e} \quad \cos \frac{\pi}{n} = a$$

Como se calculou em geometria o lado e o apothema dos polygonos

deduzir o seno e o cosseno dos arcos seguintes:

$$\frac{\pi}{3} = 60^\circ, \quad \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \quad \frac{\pi}{5} = 36^\circ, \quad \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \quad \frac{\pi}{10} = 18^\circ, \dots$$

Obtemos:

$$1^\circ \quad \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2^\circ \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3^\circ \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Conhecendo o seno e o cosseno d'estes arcos, pôde-se deduzir todas as suas outras linhas trigonometricas.

Por exemplo, acha-se:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \cotg 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \cotg 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \cotg 30^\circ = \sqrt{3}$$

[II. — Projecção de um contorno polygonal expressa por meio das funcções circulares.

32. Theorema. A projecção de um segmento de recta AB, sobre um eixo dirigido X'X, é igual, em grandeza e signal, ao producto do comprimento absoluto d'esse segmento, pelo cosseno do angulo que forma a propria direcção do segmento com a direcção positiva do eixo.

Seja A'B' a projecção de AB sobre X'X; pela origem do segmento,

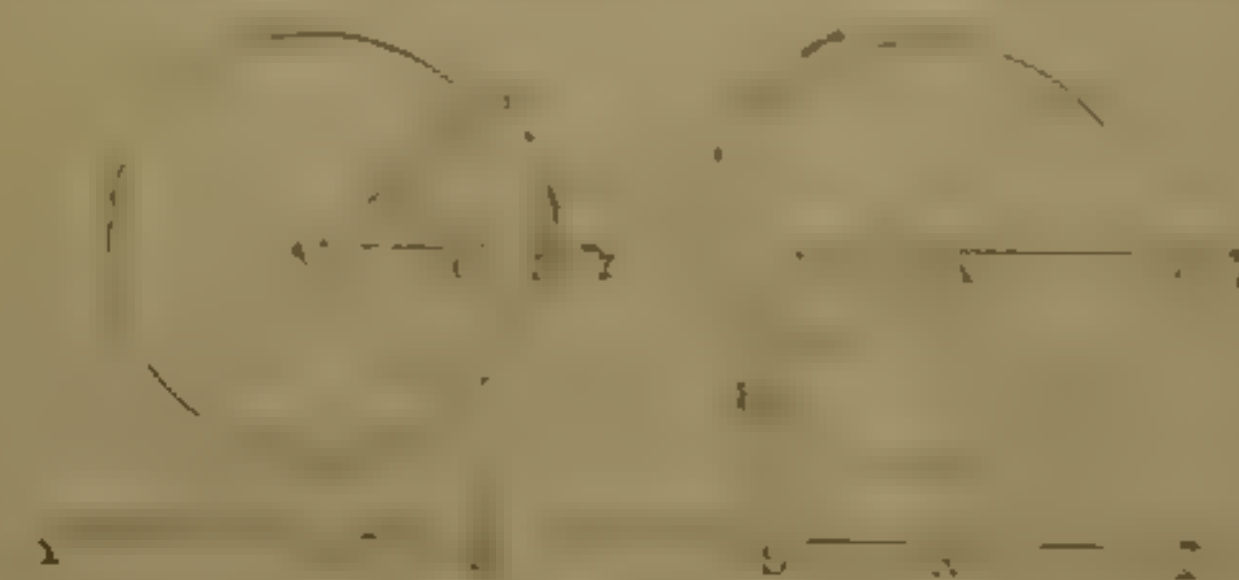


Fig. 37.

Tomemos a semi-recta AZ paralela á direcção positiva X'X. Seja C a intersecção de AZ com a projectante BB'. Trata-se de estabelecer a relação.

$$A'B' \text{ ou } AC = AB \cos ZAB.$$

Para isso, da origem A como centro, descrevemos a circunferência tendo AB como raio. Essa circunferência corta a semi-recta AZ em um ponto D que se toma como origem dos arcos.

Quatro casos podem se apresentar segundo o ponto B pertença ao 1º, ao 2º, ao 3º ou ao 4º quadrante; mas, em todos os casos, o angulo ZAB tem a mesma medida que o arco DB e, segundo a definição do coseno, sempre tem em grandeza e signal

$$\cos ZAB = \frac{AC}{AB}$$

donde

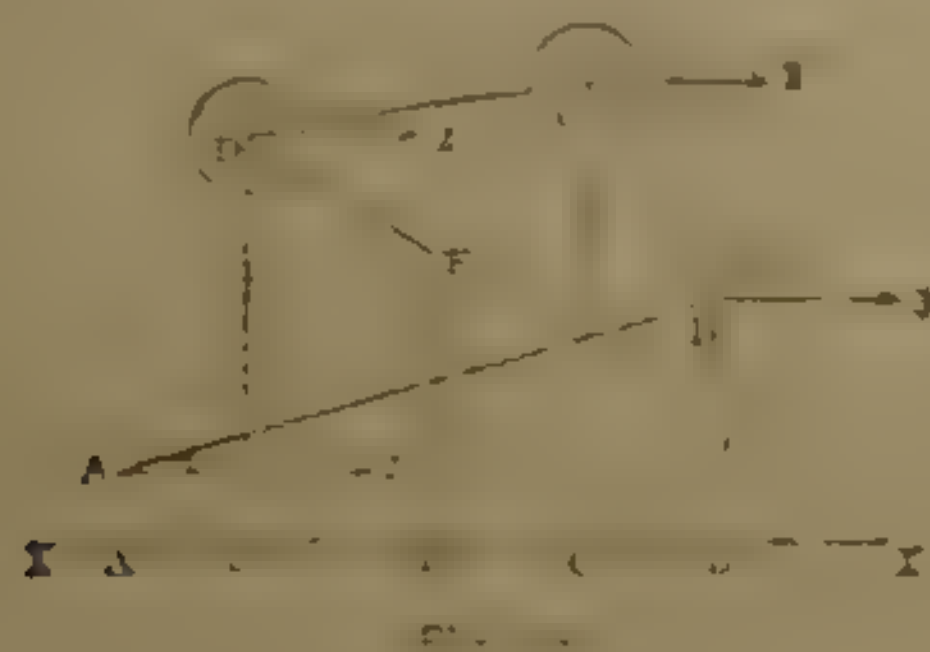
$$AC = AB \cos ZAB$$

Q. E. D.

33. Corollario. — A projecção de um contorno polygonal sobre um eixo é igual á somma dos productos que se obtem multiplicando o comprimento de cada lado pelo coseno do angulo que forma a direcção d'esse lado com a direcção positiva do eixo de projecção.

Seja um contorno polygonal ABCDE, cujos lados têm por comprimentos AB = a, BC = b, CD = c, DE = d.

Designemos por $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, os angulos formados pela propria direcção



de cada um d'esses lados com a direcção positiva do eixo de projecção XX'.

Sabemos que temos (XI):

$$A'E' - A'B' = \text{proj. } AB + \text{proj. } BC + \text{proj. } CD + \text{proj. } DE$$

Em virtude do theorema precedente, essa expressão pode se escrever

$$\text{proj. } AB + \text{proj. } BC + \text{proj. } CD + \text{proj. } DE = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + d \cos \delta$$

§ III. — Adição dos arcos.

O problema da adição dos arcos consiste em procurar as linhas trigonometricas de uma semicircunferencia algebrica de muitos arcos, conhecendo as linhas trigonometricas de cada um d'esses arcos.

34. Calcular o seno e o coseno da somma de muitos arcos, conhecendo os senos e cosenos de cada um d'esses arcos.

1º Seno (a + b) e cos (a + b) em função dos senos e cosenos dos arcos a e b.

A partir da origem dos arcos, tiremos, em seguida um ao outro e cada qual em seu proprio sentido, os arcos

$$AC = a, CD = b.$$

Liguemos OC, OD; abaixemos DI perpendicular a OC, depois DP perpendicular a OA; enfim, tracemos as semi-rectas IE, IF respectivamente parallelas ás direcções positivas dos diâmetros AA', BB'.

Os dois contornos OPD, OID tendo a mesma resultante, suas projecções sobre um eixo qualquer são iguaes entre si (XIII).

Podemos pois escrever:

$$\text{proj. } OP + \text{proj. } DP = \text{proj. } OI + \text{proj. } ID \quad (x)$$

1º Se tomarmos como eixo de projecção o diâmetro BB', temos:

$$\text{proj. } OP = 0 \quad \text{proj. } PD = \sin (a + b)$$

$$\text{proj. } OI = OI \cos BOI = OI \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = \cos b \sin a$$

$$\text{proj. } ID = ID \cos FID = ID \cos a = \sin b \cos a$$

Tomando em conta esses valores, a relação (x) torna-se

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (8)$$

2º Se escolhermos o diâmetro AA' para eixo de projecção, temos:

$$\text{proj. } OP = \cos (a + b); \text{proj. } PD = 0$$

$$\text{proj. } OI = OI \cos AOI = OI \cos a = \cos a \cos b$$

$$\text{proj. } ID = ID \cos EID = ID \cos \left(\frac{\pi}{2} + a \right) = -\sin a \sin b$$

A relação (x) torna-se

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (9)$$

Esta demonstração, fundada sobre um theorema que subsiste em todos os casos, é ella mesma inteiramente geral. As fórmulas (8) e (9) são pois applicaveis, quaesquer que sejam os valores positivos ou negativos attribuidos aos arcos a e b*.

2º Sen (a - b) e cos (a - b) em função dos senos e cosenos dos arcos a e b.

Appliquemos as fórmulas geraes (8) e (9) aos arcos a e -b. Levando em conta as igualdades.

$$\cos (-b) = \cos b \quad \text{e} \quad \sin (-b) = -\sin b$$

* A demonstração geometrica das fórmulas (8) e (9) para senos e cosenos de arcos a e b, é a seguinte: ...

$$\begin{aligned} \text{1.º} \quad \text{sen } (a - b) &= \text{sen } a \cos b - \cos a \text{sen } b & (10) \\ \text{e} \quad \cos (a + b) &= \cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b & (11) \end{aligned}$$

3.º Sen $(a + b + c)$ e cos $(a + b + c)$ em função dos senos e cosenos dos arcos a, b, c . Appliquemos a fórmula (8) aos arcos a e $b + c$.

Obtemos :

$$\text{sen } \{a + (b + c)\} = \text{sen } a \cos (b + c) + \cos a \text{sen } (b + c)$$

ou, desenvolvendo sen $(b + c)$ e cos $(b + c)$

$$\begin{aligned} \text{sen } (a + b + c) &= \text{sen } a \cos b \cos c + \cos a \text{sen } b \cos c \\ &\quad + \cos a \cos b \text{sen } c - \text{sen } a \text{sen } b \text{sen } c \end{aligned}$$

Tambem se obtem por meio da fórmula (9) :

$$\begin{aligned} \cos (a + b + c) &= \cos a \cos b \cos c - \text{sen } a \text{sen } b \cos c \\ &\quad - \text{sen } a \cos b \text{sen } c - \cos a \text{sen } b \text{sen } c \end{aligned}$$

Observação. — Procedendo de modo analogo, podemos obter successivamente os senos e os cosenos da somma de 4, 5, 6, ..., n arcos, em função dos senos e cosenos de cada um d'esses arcos. Todas as expressões assim obtidas são polynomios inteiros e homogeneos em senos e cosenos dados, cada termo contendo o seno ou o coseno de cada um dos arcos adicionados.

35. Calcular a tangente de uma somma algebrica de muitos arcos, conhecendo a tangente de cada um d'esses arcos.

1.º Tg $(a \pm b)$ em função de tg a e de tg b .

1.º A fórmula fundamental (2), applicada ao arco $(a + b)$,

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{sen } (a + b)}{\cos (a + b)}$$

desenvolvendo os dois termos da fracção,

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b}{\cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b}$$

Para obter tg $(a - b)$, dividamos os valores superiores e inferiores pelo produto cos a cos b . Assim :

$$\begin{aligned} \text{tg } (a + b) &= \frac{\text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b}{\cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b} \\ &= \frac{\frac{\text{sen } a}{\cos a} + \frac{\text{sen } b}{\cos b}}{1 + \frac{\text{sen } a}{\cos a} \frac{\text{sen } b}{\cos b}} \end{aligned}$$

$$\text{isto é} \quad \text{tg } (a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{tg } b} \quad (12)$$

2.º Applcando esta fórmula aos arcos a e $-b$, obtemos

$$\text{tg } (a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{tg } b} \quad (13)$$

Observação. — Temos tg $45^\circ = 1$ (n.º 31). Se suppozermos $a = 45^\circ$, as fórmulas (12) e (13) tornam-se

$$\text{tg } (45^\circ + b) = \frac{1 + \text{tg } b}{1 - \text{tg } b}$$

$$\text{e} \quad \text{tg } (45^\circ - b) = \frac{1 - \text{tg } b}{1 + \text{tg } b}$$

2.º Tg $(a + b + c)$ em função de tg a , tg b e tg c . Appliquemos a fórmula (12) aos arcos a e $(b + c)$. Temos

$$\text{tg } \{a + (b + c)\} = \frac{\text{tg } a + \text{tg } (b + c)}{1 - \text{tg } a \text{tg } (b + c)}$$

ou, desenvolvendo tg $(b + c)$

$$\text{tg } (a + b + c) = \frac{\text{tg } a + \frac{\text{tg } b + \text{tg } c}{1 - \text{tg } b \text{tg } c}}{1 - \text{tg } a \frac{\text{tg } b + \text{tg } c}{1 - \text{tg } b \text{tg } c}}$$

depois, multiplicando os valores superiores e inferiores por $1 - \text{tg } b \text{tg } c$

$$\text{tg } (a + b + c) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b + \text{tg } c - \text{tg } a \text{tg } b \text{tg } c}{1 - \text{tg } a \text{tg } b - \text{tg } b \text{tg } c - \text{tg } c \text{tg } a}$$

Observações. — 1.º Podemos calcular successivamente, de um modo analogo, a tangente da somma 4, 5, 6, ..., n arcos, em função das tangentes d'esses arcos. Todas essas expressões são racionais em relação ás tangentes dadas.

2.º Em lugar de deduzir estas expressões umas das outras, poderíamos calcular cada uma d'ellas pelo mesmo processo que a primeira. Assim, para obtermos tg $(a + b + c)$, basta dividir a expressão de sen $(a + b + c)$ pela de cos $(a + b + c)$, depois dividir os dois termos da fracção obtida pelo producto cos a cos b cos c .

§ IV. — Multiplicação dos arcos.

O problema da multiplicação dos arcos consiste em exprimir as linhas trigonometricas dos multiplos de um arco, em função das linhas trigonometricas d'esse arco.

Este problema é um caso particular do precedente, visto que todo multiplo de um arco a é uma somma de arcos iguaes a a . As fórmulas relativas ao multiplo ma se deduzem immediatamente das fórmulas relativas á somma de m arcos quaesquer, suppondo-se que todos esses arcos tomam um mesmo valor a .

36. Sen $2a$, cos $2a$ ou tg $2a$, em função de sen a , cos a ou tg a .

Nas fórmulas d'adição (8), (9) e (12), façamos $b = a$.

A fórmula sen $(a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad (14)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad (15)$$

$$\lg 2a = \frac{2 \lg a}{1 - \lg^2 a} \quad (16)$$

observação. — Expressamos cada linha trigonometrica do arco $2a$ em função da linha do mesmo nome. Segundo a identidade

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

as fórmulas (14) e (15) tornam-se

$$\sin^2 a = \pm 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

D'este modo, $\cos 2a$ se exprime racionalmente em função de $\cos a$, e $\sin 2a$ se exprime racionalmente em função de $\sin a$ e $\cos a$.
Essas expressões explicam-se facilmente.

Na fórmula (G)

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

α designa um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro arbitrário, positivo ou negativo.

Assim, o arco $2a$ é um qualquer dos arcos

$$2a = 4k\pi \pm 2\alpha$$

Construamos sobre um circulo trigonometrico as extremidades de todos esses arcos. Todos os arcos $4k\pi$ terminam na origem A; por

consequente todos os arcos $4k\pi + 2\alpha$ terminam no mesmo ponto M, e todos os arcos $4k\pi - 2\alpha$ no mesmo ponto M' symetrico de M em relação ao diametro A'A. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M' têm cosenos iguaes e de mesmo signal.

Logo, sendo dado $\cos a$, todos os arcos $2a$ têm um unico e mesmo coseno.

2º Sendo dado $\sin a$, o arco a é um qualquer dos arcos comprehendidos nas fórmulas (E)

$$a = 2k\pi + \alpha \text{ e } a = (2k+1)\pi - \alpha$$

α sendo um dos arcos correspondente ao seno dado.

Os arcos $2a$ acham-se portanto comprehendidos nas fórmulas

$$2a = 2k\pi + 2\alpha \text{ e } 2a = 2k\pi - 2\alpha$$

Construamos as extremidades de todos esses arcos. Os arcos $2k\pi$ terminam em A; logo os arcos $2k\pi + 2\alpha$ terminam em M, e os arcos $2k\pi - 2\alpha$ terminam em M'.

ponto M, e os arcos $2k\pi - 2\alpha$ em um ponto M', symetrico de M em relação a A'A. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M' têm senos iguaes e de signaes contrarios.

Por consequente sendo dado $\sin a$, os arcos $2a$ têm dois senos iguaes e de signaes contrarios.

37. $\sin 3a$, $\cos 3a$ e $\lg 3a$ em função de $\sin a$, $\cos a$, ou $\lg a$.

Podemos proceder de duas maneiras: Nas fórmulas d'adição relativas á somma $(a+b+c)$ (nº 34 e 35), faz-se $c=b=a$.

Ou então, nas fórmulas d'adição (8), (9) e (12), relativas á somma $(a+b)$, põe-se primeiramente $b=2a$, depois desenvolve-se $\sin 2a$.

Vem, depois de feito todo calculo:

$$\sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a \quad (1)$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \sin^2 a \cos a \quad (2)$$

$$\lg 3a = \frac{3 \lg a - \lg^3 a}{1 - 3 \lg^2 a}$$

Observação I. — $\lg 3a$ exprime-se racionalmente em função de $\lg a$. Do mesmo modo, como a fórmula (1) não contém $\cos a$ senão no segundo grão e a fórmula (2) não encerra $\sin a$ senão no segundo grão, podemos exprimir sem radical $\sin 3a$ em função de $\sin a$.

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

e $\cos 3a$ em função de $\cos a$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

Observação II. — O methodo indicado permite obter-se as linhas trigonometricas dos arcos $4a$, $5a$,... na em função das do arco a .

de $\lg a$ e $\cos ma$ em função de $\cos a$; mas a expressão de $\sin ma$ em valor de $\sin a$ contém ou não contém radicaes, conforme m é par ou impar.

Estes factos de calculo explicam-se a priori, de um modo muito simples, por meio de raciocinios semelhantes aos que terminam o nº 36.

Observação III. — As fórmulas precedentes, assim como as relações fundamentaes, são identidades, isto é, subsistem para qualquer valor do arco considerado.

Por exemplo, as fórmulas (14), (15), (16), podem se escrever, substituindo em toda parte a por $\frac{a}{2}$:

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \quad (J)$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \quad (K)$$

$$\lg a = \frac{2 \lg^2 \frac{a}{2}}{1 - \lg^2 \frac{a}{2}} \quad (L)$$

Empregaremos estas fórmulas no parágrafo seguinte, para calcular as linhas trigonometricas do arco $\frac{a}{2}$ em função das do arco a : o que constitue uma propriedade frequentemente applicada.

38. Theorema. — Todas as linhas trigonometricas de um arco se exprimem racionalmente em função da tangente da metade desse arco.

1.ª Demonstração pelo calculo.

Para obter $\sin a$, $\cos a$ e $\operatorname{tg} a$, em função das linhas do arco $\frac{a}{2}$, substituímos a por $\frac{a}{2}$ nas fórmulas (14), (15) e (16); temos assim as fórmulas (J), (K), (L).

A terceira exprime racionalmente $\operatorname{tg} a$ em função de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

Para fazer apparecer $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ nos segundos membros das outras duas, dividimos as pelo binomio $\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}$ que é igual á unidade.

A primeira torna-se, dividindo os valores superiores e inferiores por $\cos^2 \frac{a}{2}$:

$$\sin a = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \quad \text{M}$$

e a segunda,

$$\cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \quad \text{N}$$

Assim, pelas fórmulas (L), (M) e (N), $\sin a$, $\cos a$ e $\operatorname{tg} a$ se exprimem racionalmente em função de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. Portanto o theorema se verifica.

Observação. — Se em (M) e (N) substituímos $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ por $\frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$, obtemos os resultados seguintes:
 (1) $\sin a = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$
 (2) $\cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$
 (3) $\operatorname{tg} a = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}$

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2} \quad \cos \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2} \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$$

Levando em conta estas fórmulas, nas quaes devemos tomar o mesmo signal diante de cada radical (n.º 29), as fórmulas (J) e (K) se transformam em (M) e (N).

2.ª Demonstração a priori. Se temos $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, o arco $\frac{a}{2}$ é um qualquer dos arcos comprehendidos na fórmula (F)

$$\frac{a}{2} = k\pi + \alpha$$

sendo um dos arcos correspondente á tangente dada.

Por conseguinte, a é um qualquer dos arcos

$$a = 2k\pi + \alpha$$

Ora, todos esses arcos terminam no mesmo ponto do circulo trigonometrico. Por conseguinte, só admittem uma unica linha trigonometrica de cada especie, e a expressão de uma d'essas linhas não pode encerrar uma radical que consinta um duplo signal.

§ V. — Divisão dos arcos

O problema da divisão dos arcos consiste em expressar as linhas trigonometricas dos submultiplos de um arco, em função das linhas trigonometricas d'esse arco.

Limitamo-nos a resolver este problema no caso especial da bissecção: conhecendo as linhas trigonometricas do arco a , deduzir d'ellas as do arco $\frac{a}{2}$.

39. 1.ª $\sin \frac{a}{2}$ e $\cos \frac{a}{2}$ em função de $\cos a$. Sendo dado $\cos a$, trata-se de achar $\sin \frac{a}{2}$ e $\cos \frac{a}{2}$. Substituindo a por $\frac{a}{2}$ na fórmula (13) e na primeira fórmula fundamental, obtemos as equações a duas incognitas

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} = 1 \\ \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \cos a \end{cases}$$

Se reunirmos o primeiro membro a membro essas duas equações, chegamos ao systema seguinte:

$$\begin{cases} 2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a & (a) \\ 2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a & (b) \end{cases}$$

do que se deduz

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad (17)$$

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad (18)$$

Numero de soluções. Cada incognita tem dois valores reaes, iguaes e de signaes contrarios, e como os valores de $\sin \frac{a}{2}$ são independentes dos valores de $\cos \frac{a}{2}$, podemos associar cada uma das primeiras com cada uma das segundas, do que resultam quatro soluções do systema.

2º $Tg \frac{a}{2}$ em função de $\cos a$. Dividindo membro a membro as fórmulas (18) e (17), obtemos

$$tg \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \quad (19)$$

Observação. As fórmulas intermediarias (x) e (y) empregam-se frequentemente. Escrevem-se

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \quad (p)$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2} \quad (q)$$

40. Explicação dos duplos valores. Temos $\cos a$, e a é determinado. Os arcos a e $2\pi - a$ são compreendidos na fórmula (G)

$$a = 2k\pi \pm a$$

a designa um arco determinado, tendo o coseno dado

Portanto, o arco $\frac{a}{2}$ de qual se pede o seno e o cosseno, é um qualquer dos arcos compreendidos na fórmula

$$\frac{a}{2} = k\pi \pm \frac{a}{2}$$

Tracemos sobre um círculo trigonométrico as extremidades de todos esses arcos. Os arcos $k\pi$ terminam no ponto A ou no ponto A'; de modo que os arcos $k\pi \pm \frac{a}{2}$

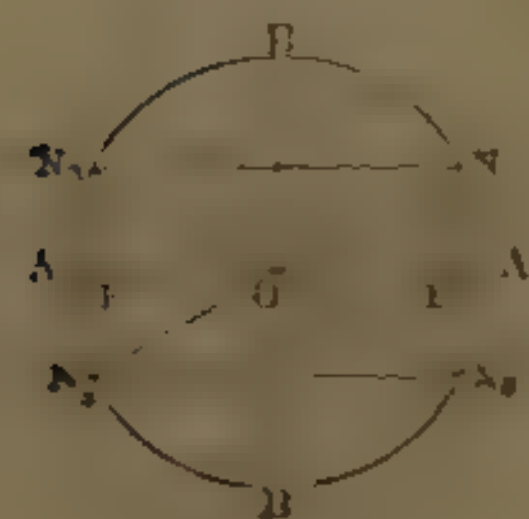


Fig. 41

terminam em dois pontos N_1, N_2 diametricamente opostos, e os arcos $k\pi \pm \frac{a}{2}$ em dois outros pontos N_3, N_4 diametricamente opostos e symetricos dos primeiros em relação a cada um dos diâmetros rectangulos AA', BB'.

Ora os arcos terminados em N_1, N_2 e os terminados em N_3, N_4 têm senos iguaes e signaes contrarios. Os arcos terminados em N_1, N_2 e os terminados em N_3, N_4 têm cossenos iguaes e signaes contrarios. E, enfim, os arcos terminados em N_1, N_2 e os terminados em N_3, N_4 têm tangentes iguaes e signaes contrarios.

Portanto, cada uma das fórmulas que exprimem todas estas linhas trigonometricas deve dar dois valores de somma nulla.

Explicação das quatro soluções. O arco $\frac{a}{2}$, determinado por $\cos a$, é um qualquer d'aquelles que terminam em um dos pontos N_1, N_2, N_3, N_4 . Ora, se adoptarmos successivamente para a extremidade do arco $\frac{a}{2}$ cada um d'esses quatro pontos, verifica-se que os dois valores de $\sin \frac{a}{2}$ se acham associados successivamente a cada um dos valores de $\cos \frac{a}{2}$. Por conseguinte o problema que consiste em procurar $\sin \frac{a}{2}$ e $\cos \frac{a}{2}$ em função de $\cos a$ admite quatro soluções differentes.

Remoção da ambiguidade. Sendo dado o proprio arco a , ao mesmo tempo que o seu coseno, o problema já não tem senão uma unica solução. O arco $\frac{a}{2}$ acha-se então bem determinado; podemos saber em que quadrante termina esse arco $\frac{a}{2}$ e d'isso deduzir o signal de cada uma de suas linhas trigonometricas, isto é, o signal que se deve conservar diante do radical, em cada uma das fórmulas (17), (18) e (19).

41. Sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ em função de sen a . Sendo dado sen a , trata-se de calcular sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$. Substituindo a por $\frac{a}{2}$ na fórmula (14) e na fórmula (15) obtemos duas equações

$$\begin{cases} \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1 \\ 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a \end{cases} \quad (1)$$

Alisando e depois subtraindo estas duas equações, obtemos a equação de 1º grau

$$\begin{cases} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right)^2 = 1 + \sin a \\ \left(\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} \right)^2 = 1 - \sin a \end{cases}$$

que se pôde escrever

$$\begin{cases} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin a} \\ \sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin a} \end{cases} \quad (2)$$

(1)

Se combinarmos estas equações membro a membro, por addição, d'onde por illustração, d'ellas se deduz

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2} (\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}), \quad (20)$$

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2} (\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}) \quad (21)$$

Numero de soluções. Em cada uma d'estas fórmulas, os signaes diante das radicaes são independentes um dos outros; obtêm-se então quatro valores para $\sin \frac{a}{2}$ e os mesmos valores para $\cos \frac{a}{2}$.

Porém, a cada valor de $\sin \frac{a}{2}$, a equação (2) não permite de fazer corresponder senão um unico valor de $\cos \frac{a}{2}$; de modo que o systema admite quatro soluções, e não dezesseis.

Os signaes semelhantemente collocados nas duas fórmulas correspondem-se entre si. Com effeito, as equações (20), (21) se completam uma em duas outras; portanto, o systema (20), (21) equivale ao conjunto de quatro systemas para os, não admitindo cada um senão uma unica solução. Basta escrever e resolver individualmente esses quatro systemas, para verificar que os signaes relativos a uma mesma solução, se collocados semelhantemente nas fórmulas (20) e (21).

42. Explicação dos valores multiplos. Temos $\sin a$. O arco a não está determinado: é um qualquer dos arcos comprehendidos nas formulas (E).

$$a = 2k\pi + a \quad \text{e} \quad a = 2k\pi + 1 - a$$

a designa um arco determinado, tendo o seu dado.

Assim, o arco $\frac{a}{2}$, do qual se buscam as linhas trigonometricas, é um qualquer dos arcos comprehendidos nas formulas

$$\frac{a}{2} = k\pi + \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} = 2k\pi + 1 - \frac{a}{2}$$

Construamos sobre um circulo trigonometrico a extremidade de todos esses arcos.

Qualquer que seja o numero inteiro k , o arco $k\pi$ termina em A ou em A', logo $k\pi + \frac{a}{2}$ termina em um ponto N ou no ponto N', diametralmente opposto, $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ termina em B ou em B';

logo $(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}$ termina no ponto N, symetrico de N' em relação á bissectriz do angulo AOB, ou no ponto N', diametralmente opposto a N.

Ora os arcos terminados nas extremidades do diametro N, N', têm os senos e os cosenos repetidos entre si, e os senos e os cosenos dos arcos terminados nas extremidades do diametro NN',.

Esses senos e esses cosenos têm quatro valores, geralmente distintos, iguais dois a dois e com signaes contrarios.



Fig. 42.

Cessação da ambiguidade. Se tivermos o arco a ao mesmo tempo que $\sin a$, o problema só admite uma solução.

Com effeito, sua metade $\frac{a}{2}$ se acha então bem determinada;

podemos saber em que oitavo de circumferencia cahe sua extremidade; o que dá a conhecer o signal de cada um dos binomios.

$$\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}$$

$$\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2}$$

Desde logo o systema (7), (8) está bem determinado, e d'elle podemos concluir qual é o signal que se deve adoptar nas radicaes nas formulas (20) e (21).

Por exemplo, seja $a = 50^\circ$, d'onde $\frac{a}{2} = 25^\circ$.

O seno e o coseno do arco $\frac{a}{2}$ são positivos, mas o coseno é maior que o seno. Temos pois que resolver o systema

$$\sin 25^\circ + \cos 25^\circ = \sqrt{1 + \sin 50^\circ}$$

$$\sin 25^\circ - \cos 25^\circ = -\sqrt{1 - \sin 50^\circ}$$

A solução é unica.

Seja ainda $a = 420^\circ$, d'onde $\frac{a}{2} = 210^\circ$.

O arco $\frac{a}{2}$ estando comprehendido entre 180° e 225° , $\sin \frac{a}{2}$ e $\cos \frac{a}{2}$ são negativos e, em valor absoluto, o coseno é maior que o seno. O systema (20), (21) torna-se pois

$$\sin 210^\circ + \cos 210^\circ = -\sqrt{1 + \sin 420^\circ}$$

$$\sin 210^\circ - \cos 210^\circ = +\sqrt{1 - \sin 420^\circ}$$

Do que deduz se

$$\sin 210^\circ = \frac{-\sqrt{1 + \sin 420^\circ} + \sqrt{1 - \sin 420^\circ}}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \frac{-\sqrt{1 + \sin 420^\circ} - \sqrt{1 - \sin 420^\circ}}{2}$$

43. $Tg \frac{a}{2}$ em função de $tg a$. — Substituindo a por $\frac{a}{2}$ na fórmula (16), obtemos a equação

$$tg a = \frac{2 tg \frac{a}{2}}{1 - tg^2 \frac{a}{2}}$$

que temos de ordenar e resolver em relação a $tg \frac{a}{2}$

Póde-se escrever

$$(1 - tg^2 \frac{a}{2}) - 2 tg \frac{a}{2} - tg a = 0 \quad (21)$$

d'onde

$$tg \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + tg^2 a}}{tg a} \quad (22)$$

O producto das raizes da equação (21) sendo igual a -1 , qualquer uma das raizes se torna a inversa da outra e a equação (22) dá

44. Explicação destes resultados. Tem-se $tg a$. O arco a não está determinado, mas um qualquer dos arcos comprehendidos na fórmula (F)

$$a = k\pi + \alpha$$

é escolhido um arco determinado, tendo a tangente dada.

Os arcos $\frac{a}{2}$ a que se procura a tangente estão comprehendidos na fórmula

$$\frac{a}{2} = k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Construam-se sobre o círculo trigonometrico a extremidade de todos esses arcos.

Os arcos $\frac{a}{2}$ terminam nas extremidades dos diâmetros rectangulares AA' , BB' ; por conseguinte

os arcos $\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2}$ terminam nas extremidades dos outros dois diâmetros rectangulares NN_1 , N_2N_3 .

Oras, os arcos terminados em N e N_1 tem a mesma tangente AR , os terminados em N_2 e N_3 tem outra tangente AR' .

Os valores absolutos dessas tangentes são inversos, visto que a altura AR do triângulo rectângulo BOR determina a relação

$$AR = OR' = OA = 1$$

Logo as tangentes são de signos contrários, de modo que temos

$$tg AOR, tg AOR' = -1.$$

Cessaçã da ambiguidade. Se tivermos o arco a ao mesmo

tempo que $tg a$, o problema fica com uma solução só; n'esse caso o arco $\frac{a}{2}$ está bem determinado e podemos saber em que quadrante cahe a extremidade d'esse arco, d'isso deduzir o signal de sua tangente, e escolher qual das raizes da equação (21) é a que dá o valor d'essa tangente.

§ VI. — Transformações logarithmicas.

Tornar calculavel por logarithmos uma expressão polynomia dada, é transformar essa expressão em um monomio equivalente.

Isso se consegue applicando as fórmulas que vamos estabelecer, ou por meio de angulos auxiliares.

Formulas de transformação.

Temos em vista tornar calculavel por meio de logarithmos a somma algebraica de duas linhas trigonometricas do mesma especie.

46. Transformar em producto $\sin p \pm \sin q$.

Faz-se $p = a + b$ e $q = a - b$

d'onde $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$

Então, $\sin p \pm \sin q = \sin(a+b) \pm \sin(a-b)$.

Em virtude das formulas

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

as formulas precedentes tornam-se respectivamente

$$\sin p + \sin q = 2 \sin a \cos b$$

1.ª

$$\sin p - \sin q = 2 \sin a \cos b$$

2.ª

$$\sin p + \sin q = 2 \cos a \sin b$$

3.ª

$$\sin p - \sin q = 2 \cos a \sin b$$

4.ª

Observação I. As formulas precedentes 23 e 24 p. 46, p. 47, p. 48, p. 49, p. 50, p. 51, p. 52, p. 53, p. 54, p. 55, p. 56, p. 57, p. 58, p. 59, p. 60, p. 61, p. 62, p. 63, p. 64, p. 65, p. 66, p. 67, p. 68, p. 69, p. 70, p. 71, p. 72, p. 73, p. 74, p. 75, p. 76, p. 77, p. 78, p. 79, p. 80, p. 81, p. 82, p. 83, p. 84, p. 85, p. 86, p. 87, p. 88, p. 89, p. 90, p. 91, p. 92, p. 93, p. 94, p. 95, p. 96, p. 97, p. 98, p. 99, p. 100, p. 101, p. 102, p. 103, p. 104, p. 105, p. 106, p. 107, p. 108, p. 109, p. 110, p. 111, p. 112, p. 113, p. 114, p. 115, p. 116, p. 117, p. 118, p. 119, p. 120, p. 121, p. 122, p. 123, p. 124, p. 125, p. 126, p. 127, p. 128, p. 129, p. 130, p. 131, p. 132, p. 133, p. 134, p. 135, p. 136, p. 137, p. 138, p. 139, p. 140, p. 141, p. 142, p. 143, p. 144, p. 145, p. 146, p. 147, p. 148, p. 149, p. 150, p. 151, p. 152, p. 153, p. 154, p. 155, p. 156, p. 157, p. 158, p. 159, p. 160, p. 161, p. 162, p. 163, p. 164, p. 165, p. 166, p. 167, p. 168, p. 169, p. 170, p. 171, p. 172, p. 173, p. 174, p. 175, p. 176, p. 177, p. 178, p. 179, p. 180, p. 181, p. 182, p. 183, p. 184, p. 185, p. 186, p. 187, p. 188, p. 189, p. 190, p. 191, p. 192, p. 193, p. 194, p. 195, p. 196, p. 197, p. 198, p. 199, p. 200, p. 201, p. 202, p. 203, p. 204, p. 205, p. 206, p. 207, p. 208, p. 209, p. 210, p. 211, p. 212, p. 213, p. 214, p. 215, p. 216, p. 217, p. 218, p. 219, p. 220, p. 221, p. 222, p. 223, p. 224, p. 225, p. 226, p. 227, p. 228, p. 229, p. 230, p. 231, p. 232, p. 233, p. 234, p. 235, p. 236, p. 237, p. 238, p. 239, p. 240, p. 241, p. 242, p. 243, p. 244, p. 245, p. 246, p. 247, p. 248, p. 249, p. 250, p. 251, p. 252, p. 253, p. 254, p. 255, p. 256, p. 257, p. 258, p. 259, p. 260, p. 261, p. 262, p. 263, p. 264, p. 265, p. 266, p. 267, p. 268, p. 269, p. 270, p. 271, p. 272, p. 273, p. 274, p. 275, p. 276, p. 277, p. 278, p. 279, p. 280, p. 281, p. 282, p. 283, p. 284, p. 285, p. 286, p. 287, p. 288, p. 289, p. 290, p. 291, p. 292, p. 293, p. 294, p. 295, p. 296, p. 297, p. 298, p. 299, p. 300, p. 301, p. 302, p. 303, p. 304, p. 305, p. 306, p. 307, p. 308, p. 309, p. 310, p. 311, p. 312, p. 313, p. 314, p. 315, p. 316, p. 317, p. 318, p. 319, p. 320, p. 321, p. 322, p. 323, p. 324, p. 325, p. 326, p. 327, p. 328, p. 329, p. 330, p. 331, p. 332, p. 333, p. 334, p. 335, p. 336, p. 337, p. 338, p. 339, p. 340, p. 341, p. 342, p. 343, p. 344, p. 345, p. 346, p. 347, p. 348, p. 349, p. 350, p. 351, p. 352, p. 353, p. 354, p. 355, p. 356, p. 357, p. 358, p. 359, p. 360, p. 361, p. 362, p. 363, p. 364, p. 365, p. 366, p. 367, p. 368, p. 369, p. 370, p. 371, p. 372, p. 373, p. 374, p. 375, p. 376, p. 377, p. 378, p. 379, p. 380, p. 381, p. 382, p. 383, p. 384, p. 385, p. 386, p. 387, p. 388, p. 389, p. 390, p. 391, p. 392, p. 393, p. 394, p. 395, p. 396, p. 397, p. 398, p. 399, p. 400, p. 401, p. 402, p. 403, p. 404, p. 405, p. 406, p. 407, p. 408, p. 409, p. 410, p. 411, p. 412, p. 413, p. 414, p. 415, p. 416, p. 417, p. 418, p. 419, p. 420, p. 421, p. 422, p. 423, p. 424, p. 425, p. 426, p. 427, p. 428, p. 429, p. 430, p. 431, p. 432, p. 433, p. 434, p. 435, p. 436, p. 437, p. 438, p. 439, p. 440, p. 441, p. 442, p. 443, p. 444, p. 445, p. 446, p. 447, p. 448, p. 449, p. 450, p. 451, p. 452, p. 453, p. 454, p. 455, p. 456, p. 457, p. 458, p. 459, p. 460, p. 461, p. 462, p. 463, p. 464, p. 465, p. 466, p. 467, p. 468, p. 469, p. 470, p. 471, p. 472, p. 473, p. 474, p. 475, p. 476, p. 477, p. 478, p. 479, p. 480, p. 481, p. 482, p. 483, p. 484, p. 485, p. 486, p. 487, p. 488, p. 489, p. 490, p. 491, p. 492, p. 493, p. 494, p. 495, p. 496, p. 497, p. 498, p. 499, p. 500, p. 501, p. 502, p. 503, p. 504, p. 505, p. 506, p. 507, p. 508, p. 509, p. 510, p. 511, p. 512, p. 513, p. 514, p. 515, p. 516, p. 517, p. 518, p. 519, p. 520, p. 521, p. 522, p. 523, p. 524, p. 525, p. 526, p. 527, p. 528, p. 529, p. 530, p. 531, p. 532, p. 533, p. 534, p. 535, p. 536, p. 537, p. 538, p. 539, p. 540, p. 541, p. 542, p. 543, p. 544, p. 545, p. 546, p. 547, p. 548, p. 549, p. 550, p. 551, p. 552, p. 553, p. 554, p. 555, p. 556, p. 557, p. 558, p. 559, p. 560, p. 561, p. 562, p. 563, p. 564, p. 565, p. 566, p. 567, p. 568, p. 569, p. 570, p. 571, p. 572, p. 573, p. 574, p. 575, p. 576, p. 577, p. 578, p. 579, p. 580, p. 581, p. 582, p. 583, p. 584, p. 585, p. 586, p. 587, p. 588, p. 589, p. 590, p. 591, p. 592, p. 593, p. 594, p. 595, p. 596, p. 597, p. 598, p. 599, p. 600, p. 601, p. 602, p. 603, p. 604, p. 605, p. 606, p. 607, p. 608, p. 609, p. 610, p. 611, p. 612, p. 613, p. 614, p. 615, p. 616, p. 617, p. 618, p. 619, p. 620, p. 621, p. 622, p. 623, p. 624, p. 625, p. 626, p. 627, p. 628, p. 629, p. 630, p. 631, p. 632, p. 633, p. 634, p. 635, p. 636, p. 637, p. 638, p. 639, p. 640, p. 641, p. 642, p. 643, p. 644, p. 645, p. 646, p. 647, p. 648, p. 649, p. 650, p. 651, p. 652, p. 653, p. 654, p. 655, p. 656, p. 657, p. 658, p. 659, p. 660, p. 661, p. 662, p. 663, p. 664, p. 665, p. 666, p. 667, p. 668, p. 669, p. 670, p. 671, p. 672, p. 673, p. 674, p. 675, p. 676, p. 677, p. 678, p. 679, p. 680, p. 681, p. 682, p. 683, p. 684, p. 685, p. 686, p. 687, p. 688, p. 689, p. 690, p. 691, p. 692, p. 693, p. 694, p. 695, p. 696, p. 697, p. 698, p. 699, p. 700, p. 701, p. 702, p. 703, p. 704, p. 705, p. 706, p. 707, p. 708, p. 709, p. 710, p. 711, p. 712, p. 713, p. 714, p. 715, p. 716, p. 717, p. 718, p. 719, p. 720, p. 721, p. 722, p. 723, p. 724, p. 725, p. 726, p. 727, p. 728, p. 729, p. 730, p. 731, p. 732, p. 733, p. 734, p. 735, p. 736, p. 737, p. 738, p. 739, p. 740, p. 741, p. 742, p. 743, p. 744, p. 745, p. 746, p. 747, p. 748, p. 749, p. 750, p. 751, p. 752, p. 753, p. 754, p. 755, p. 756, p. 757, p. 758, p. 759, p. 760, p. 761, p. 762, p. 763, p. 764, p. 765, p. 766, p. 767, p. 768, p. 769, p. 770, p. 771, p. 772, p. 773, p. 774, p. 775, p. 776, p. 777, p. 778, p. 779, p. 780, p. 781, p. 782, p. 783, p. 784, p. 785, p. 786, p. 787, p. 788, p. 789, p. 790, p. 791, p. 792, p. 793, p. 794, p. 795, p. 796, p. 797, p. 798, p. 799, p. 800, p. 801, p. 802, p. 803, p. 804, p. 805, p. 806, p. 807, p. 808, p. 809, p. 810, p. 811, p. 812, p. 813, p. 814, p. 815, p. 816, p. 817, p. 818, p. 819, p. 820, p. 821, p. 822, p. 823, p. 824, p. 825, p. 826, p. 827, p. 828, p. 829, p. 830, p. 831, p. 832, p. 833, p. 834, p. 835, p. 836, p. 837, p. 838, p. 839, p. 840, p. 841, p. 842, p. 843, p. 844, p. 845, p. 846, p. 847, p. 848, p. 849, p. 850, p. 851, p. 852, p. 853, p. 854, p. 855, p. 856, p. 857, p. 858, p. 859, p. 860, p. 861, p. 862, p. 863, p. 864, p. 865, p. 866, p. 867, p. 868, p. 869, p. 870, p. 871, p. 872, p. 873, p. 874, p. 875, p. 876, p. 877, p. 878, p. 879, p. 880, p. 881, p. 882, p. 883, p. 884, p. 885, p. 886, p. 887, p. 888, p. 889, p. 890, p. 891, p. 892, p. 893, p. 894, p. 895, p. 896, p. 897, p. 898, p. 899, p. 900, p. 901, p. 902, p. 903, p. 904, p. 905, p. 906, p. 907, p. 908, p. 909, p. 910, p. 911, p. 912, p. 913, p. 914, p. 915, p. 916, p. 917, p. 918, p. 919, p. 920, p. 921, p. 922, p. 923, p. 924, p. 925, p. 926, p. 927, p. 928, p. 929, p. 930, p. 931, p. 932, p. 933, p. 934, p. 935, p. 936, p. 937, p. 938, p. 939, p. 940, p. 941, p. 942, p. 943, p. 944, p. 945, p. 946, p. 947, p. 948, p. 949, p. 950, p. 951, p. 952, p. 953, p. 954, p. 955, p. 956, p. 957, p. 958, p. 959, p. 960, p. 961, p. 962, p. 963, p. 964, p. 965, p. 966, p. 967, p. 968, p. 969, p. 970, p. 971, p. 972, p. 973, p. 974, p. 975, p. 976, p. 977, p. 978, p. 979, p. 980, p. 981, p. 982, p. 983, p. 984, p. 985, p. 986, p. 987, p. 988, p. 989, p. 990, p. 991, p. 992, p. 993, p. 994, p. 995, p. 996, p. 997, p. 998, p. 999, p. 1000, p. 1001, p. 1002, p. 1003, p. 1004, p. 1005, p. 1006, p. 1007, p. 1008, p. 1009, p. 1010, p. 1011, p. 1012, p. 1013, p. 1014, p. 1015, p. 1016, p. 1017, p. 1018, p. 1019, p. 1020, p. 1021, p. 1022, p. 1023, p. 1024, p. 1025, p. 1026, p. 1027, p. 1028, p. 1029, p. 1030, p. 1031, p. 1032, p. 1033, p. 1034, p. 1035, p. 1036, p. 1037, p. 1038, p. 1039, p. 1040, p. 1041, p. 1042, p. 1043, p. 1044, p. 1045, p. 1046, p. 1047, p. 1048, p. 1049, p. 1050, p. 1051, p. 1052, p. 1053, p. 1054, p. 1055, p. 1056, p. 1057, p. 1058, p. 1059, p. 1060, p. 1061, p. 1062, p. 1063, p. 1064, p. 1065, p. 1066, p. 1067, p. 1068, p. 1069, p. 1070, p. 1071, p. 1072, p. 1073, p. 1074, p. 1075, p. 1076, p. 1077, p. 1078, p. 1079, p. 1080, p. 1081, p. 1082, p. 1083, p. 1084, p. 1085, p. 1086, p. 1087, p. 1088, p. 1089, p. 1090, p. 1091, p. 1092, p. 1093, p. 1094, p. 1095, p. 1096, p. 1097, p. 1098, p. 1099, p. 1100, p. 1101, p. 1102, p. 1103, p. 1104, p. 1105, p. 1106, p. 1107, p. 1108, p. 1109, p. 1110, p. 1111, p. 1112, p. 1113, p. 1114, p. 1115, p. 1116, p. 1117, p. 1118, p. 1119, p. 1120, p. 1121, p. 1122, p. 1123, p. 1124, p. 1125, p. 1126, p. 1127, p. 1128, p. 1129, p. 1130, p. 1131, p. 1132, p. 1133, p. 1134, p. 1135, p. 1136, p. 1137, p. 1138, p. 1139, p. 1140, p. 1141, p. 1142, p. 1143, p. 1144, p. 1145, p. 1146, p. 1147, p. 1148, p. 1149, p. 1150, p. 1151, p. 1152, p. 1153, p. 1154, p. 1155, p. 1156, p. 1157, p. 1158, p. 1159, p. 1160, p. 1161, p. 1162, p. 1163, p. 1164, p. 1165, p. 1166, p. 1167, p. 1168, p. 1169, p. 1170, p. 1171, p. 1172, p. 1173, p. 1174, p. 1175, p. 1176, p. 1177, p. 1178, p. 1179, p. 1180, p. 1181, p. 1182, p. 1183, p. 1184, p. 1185, p. 1186, p. 1187, p. 1188, p. 1189, p. 1190, p. 1191, p. 1192, p. 1193, p. 1194, p. 1195, p. 1196, p. 1197, p. 1198, p. 1199, p. 1200, p. 1201, p. 1202, p. 1203, p. 1204, p. 1205, p. 1206, p. 1207, p. 1208, p. 1209, p. 1210, p. 1211, p. 1212, p. 1213, p. 1214, p. 1215, p. 1216, p. 1217, p. 1218, p. 1219, p. 1220, p. 1221, p. 1222, p. 1223, p. 1224, p. 1225, p. 1226, p. 1227, p. 1228, p. 1229, p. 1230, p. 1231, p. 1232, p. 1233, p. 1234, p. 1235, p. 1236, p. 1237, p. 1238, p. 1239, p. 1240, p. 1241, p. 1242, p. 1243, p. 1244, p. 1245, p. 1246, p. 1247, p. 1248, p. 1249, p. 1250, p. 1251, p. 1252, p. 1253, p. 1254, p. 1255, p. 1256, p. 1257, p. 1258, p. 1259, p. 1260, p. 1261, p. 1262, p. 1263, p. 1264, p. 1265, p. 1266, p. 1267, p. 1268, p. 1269, p. 1270, p. 1271, p. 1272, p. 1273, p. 1274, p. 1275, p. 1276, p. 1277, p. 1278, p. 1279, p. 1280, p. 1281, p. 1282, p. 1283, p. 1284, p. 1285, p. 1286, p. 1287, p. 1288, p. 1289, p. 1290, p. 1291, p. 1292, p. 1293, p. 1294, p. 1295, p. 1296, p. 1297, p. 1298, p. 1299, p. 1300, p. 1301, p. 1302, p. 1303, p. 1304, p. 1305, p. 1306, p. 1307, p. 1308, p. 1309, p. 1310, p. 1311, p. 1312, p. 1313, p. 1314, p. 1315, p. 1316, p. 1317, p. 1318, p. 1319, p. 1320, p. 1321, p. 1322, p. 1323, p. 1324, p. 1325, p. 1326, p. 1327, p. 1328, p. 1329, p. 1330, p. 1331, p. 1332, p. 1333, p. 1334, p. 1335, p. 1336, p. 1337, p. 1338, p. 1339, p. 1340, p. 1341, p. 1342, p. 1343, p. 1344, p. 1345, p. 1346, p. 1347, p. 1348, p. 1349, p. 1350, p. 1351, p. 1352, p. 1353, p. 1354, p. 1355, p. 1356, p. 1357,

Aplicações. 1ª Transformar a expressão

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q}$$

Se dividirmos o numerador e o denominador pelas fórmulas (23) e (24) temos

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}$$

Mas

$$\frac{\sin \frac{p-q}{2}}{\cos \frac{p+q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p-q}{2}$$

e

$$\frac{\cos \frac{p-q}{2}}{\sin \frac{p-q}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{p-q}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}$$

Logo

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}} \quad (25)$$

2ª Transformar a expressão $\sin a \pm \cos b$.

Podemos escrever em primeiro lugar

$$\sin a \pm \cos b = \sin a \pm \sin \left(\frac{\pi}{2} - b \right)$$

Depois aplicando as fórmulas (23) e (24)

$$\sin a + \cos b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin a - \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

47 Transformar em producto $\cos p - \cos q$.

Faz-se

$$p = a + b \quad \text{e} \quad q = a - b$$

Logo

$$a = \frac{p+q}{2} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

Faz-se,

$$\cos q - \cos p = \cos (a-b) - \cos (a+b)$$

Ora, por termos $\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\cos (a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

As igualdades precedentes tornam-se respectivamente

$$\cos q - \cos p = 2 \sin a \sin b \quad (26)$$

isto é

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (26)$$

isto é

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (27)$$

Observação 1. As fórmulas precedentes (26) e (27) permitem substituir a soma de dois cossenos pelo duplo producto de 1º cossenos. A diferença de dois cossenos, pelo duplo producto de dois senos.

II. As relações (1) e (2) podem se escrever

$$2 \cos a \cos b = \cos (a+b) + \cos (a-b)$$

$$2 \sin a \sin b = \cos (a-b) - \cos (a+b)$$

Podemos usar para somar o duplo producto de dois senos ou de dois cossenos pela soma e a diferença de dois cossenos.

Caso especial. 7° $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$ Podemos escrever $1 \pm \cos a = \cos 0^\circ \pm \cos a$

Presteseguinte, em virtude das fórmulas (26) e (27), temos

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \quad (28)$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2} \quad (29)$$

igualdades (28) e (29),

Dividindo as duas partes da primeira, obtemos

$$\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}}$$

donde deduzimos:

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

Faz-se a substituição (30).

48. Transformar em monómio $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b$.

Substituindo cada tangente em função do seno e do cosseno, e simplificando as fracções obtidas, temos

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b} \quad (28)$$

Caso especial. Podemos applicar esta fórmula á expressão

$$1 \pm \operatorname{tg} a$$

Temos $1 = \operatorname{tg} 45^\circ \quad \bullet \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por conseguinte

$$1 \pm \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen}(45^\circ \pm a)}{\cos 45^\circ} = \frac{\operatorname{sen}(45^\circ \pm a) \sqrt{2}}{1}$$

Observação. Quando se tem a somma de duas linhas complementares da mesma especie, procede-se como para a somma de duas tangentes. Obtem-se assim

$$\operatorname{sen} a \pm \operatorname{sen} b = \frac{\cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}$$

Emprego dos angulos auxiliares.

49. 1. Tornar logarithmico um binomio $x = z \pm \frac{1}{z}$

Quando se tem a expressão $x = z \pm \frac{1}{z}$, onde z é qualquer numero real ou imaginario, podemos applicar a formula de Moivre para transformar a expressão em uma soma de potencias de z .

$$\begin{aligned} 1 + z^2 &= 2 \cos^2 \varphi & 1 - z^2 &= 2 \sin^2 \varphi \\ 1 + z^2 &= 2 \cos^2 \varphi & 1 + iz &= 2 \cos \varphi e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Podemos, portanto, expressar a expressão dada da seguinte forma

$$x = z \left(1 \pm \frac{1}{z^2} \right)$$

Se $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, a expressão se transforma em $x = r^2 \cos 2\varphi$ ou $x = r^2 \sin 2\varphi$.

$$x = r^2 (1 - \cos^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \varphi$$

2º Se $\frac{b}{a}$ é inferior a 1 e precedido de um ou outro signal podemos pôr $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, o que dá (nº 39):

$$a + b = a(1 + \cos \varphi) = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$a - b = a(1 - \cos \varphi) = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Se $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, temos então (nº 39):

$$a + b = a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = a \sec^2 \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$$

$$a + b = a \sqrt{2} \operatorname{sen}(45^\circ \pm \varphi)$$

2. Tornar logarithmico um polynomio $a + b \pm c + d \pm \dots$

Para tornar logarithmico um polynomio auxilia substitue-se primeiramente $a \pm b$ por $2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ ou $2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, por meio de um segundo angulo auxiliar, substitue-se $c \pm d$ por $2c \cos^2 \frac{\psi}{2}$ ou $2c \sin^2 \frac{\psi}{2}$, por um monomio γ ; e assim por diante.

Se o polynomio tiver mais de duas parcelas, é preciso recorrer successivamente a estas formulas.

50. Applicações. O emprego dos angulos auxiliares é geral; para transformar a expressão $x = z \pm \frac{1}{z}$ em uma soma de potencias de z , os quatro systemas acima não são applicaveis a todos os casos; é preciso modificar um pouco o metodo geral.

Exemplo I. Tornar logarithmico $x = \sqrt{1+z^2}$

Aplicando o metodo geral, a expressão se transforma em

$$\sqrt{1+z^2} = \sqrt{1+z^2}$$

$$\sqrt{1+z^2} = \sqrt{1+z^2}$$

$$\sqrt{1+z^2} = a \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} = a \sec \varphi = \frac{a}{\cos \varphi}$$

Exemplo II. Tornar logarithmico $x = \sqrt{1-z^2}$

Supondo $z = \operatorname{tg} \varphi$, a expressão se transforma em $x = \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 \varphi}$.

$$\sqrt{1-z^2} = a \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 \varphi}$$

ou, fazendo

$$\frac{b^2}{a^2} = \cos^2 \varphi$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = a \sin \varphi$$

Exemplo III. Tornar logarithmico $\frac{a-b}{a+b}$

Em logar de tornar logarithmico separadamente cada um dos termos da fracção, dividem-se os valores superiores e inferiores por a , depois faz-se $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$

A expressão torna-se (nº 49)

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi)$$

Exemplo IV. Tornar logarithmico $\frac{a \sin x \pm b \cos x}{a \cos x \pm b \sin x}$ Põe-se em factor commun a expressão, em logar de $a \sin x$;

obtem-se $a \left(\sin x \pm \frac{b}{a} \cos x \right)$

ou, pondo

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$a \left(\sin x \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos x \right)$$

isto é

$$\frac{a}{\cos \varphi} (\sin x \cos \varphi \pm \sin \varphi \cos x)$$

ou enfim

$$\frac{a \sin (x \pm \varphi)}{\cos \varphi}$$

61 Problema. Tornar calculáveis por logarithmos as raízes d'uma equação do 2.º grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Estas raízes, suppostas reaes, têm por expressão

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Na dois casos a distinguir:

1º caso $\frac{c}{a} < 0$. O radical pôde-se escrever

$$\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}$$

o producto ac sendo negativo, podemos escrever

$$\frac{4ac}{b^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

d'onde

A fórmula torna-se

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm b \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}}{2a} = \frac{b(\cos \varphi \mp 1)}{2a \cos \varphi}$$

d'onde, separando as raízes

$$x' = + \frac{b}{2a} \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} \right) = + \frac{b \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{a \cos \varphi}$$

$$x'' = - \frac{b}{2a} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right) = - \frac{b \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{a \cos \varphi}$$

2º caso. $\frac{c}{a} > 0$ com $b^2 - 4ac > 0$

Temos $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}$

Se o radical superior na fórmula demos escrever $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{4ac}{b^2}$

Então, $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \pm b \cos \varphi$

As raízes tornam-se

$$x' = \frac{-b + b \cos \varphi}{2a} = - \frac{b}{2a} (1 - \cos \varphi) = - \frac{b \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{a}$$

$$x'' = \frac{-b - b \cos \varphi}{2a} = - \frac{b}{2a} (1 + \cos \varphi) = - \frac{b \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{a}$$

Exercícios.**1º** Calcular $\sin a = \frac{4}{5}$, calcular o coseno correspondente de a .

Temos $\cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \frac{3}{5}$

e por consequente $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \pm \frac{4}{3}$

2º Calcular $\operatorname{tg} a = \frac{m}{n}$, calcular o seno e o coseno de a .

As fórmulas 6 e 7 dão

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\frac{m}{n}}{\pm \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}} = \pm \frac{m}{\sqrt{n^2 + m^2}}$$

$$\cos a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}} = \pm \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}}$$

Verificar a igualdade

$$\arcsen \frac{m-1}{m+1} = \arccos \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$$

$$\frac{m-1}{m+1} = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$$

$$\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{m}}{m+1}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(m-1)^2 + 4m}{(m+1)^2} = \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\cos t} = \frac{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}{1 - \tan^2 \frac{t}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sec t - 1}{\sec t + 1}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\sec t - 1}{\sec t + 1}}$$

$$\frac{2}{1 + \tan^2 t} = \frac{1 + \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} = 1$$

8º Demonstrar a identidade

$$\lg^2 x + \operatorname{colg}^2 x = \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}$$

Temos (nº 36 e 38)

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - \frac{4 \sin^2 x}{1 + \lg^2 x}$$

O segundo membro da identidade pôde pois escrever-se

$$\frac{4 - \frac{8 \lg^2 x}{(1 + \lg^2 x)^2}}{1 - \frac{4 \sin^2 x}{1 + \lg^2 x}} = \frac{1 + \lg^2 x}{\lg^2 x} = \lg^2 x + \frac{1}{\lg^2 x}$$

resultado identico ao primeiro membro

9º Na hypothese $a + b + c = 180^\circ$, demonstrar que temos

$$\lg a + \lg b + \lg c = \lg a \lg b \lg c$$

Temos

$$a + b = 180^\circ - c$$

ou, igualando as tangentes dos dois membros

$$\frac{\lg a + \lg b}{1 - \lg a \lg b} = \lg(180^\circ - c) = -\lg c$$

$$\lg a + \lg b = -\lg c + \lg a \lg b \lg c$$

$$10. \text{ A } t \text{ e } y \text{ das } a + b + c = 180^\circ, \text{ demonstrar que } \lg a + \lg b + \lg c = \lg a \lg b \lg c$$

A relação dada pode escrever-se

$$a + b = 180^\circ - c$$

ou, igualando as tangentes dos dois membros,

$$\cos a \cos b = \sin a \sin b = \cos c$$

dele, se a toma em seno, depois de virar os dois membros

$$\cos a \cos b + \cos c = \sin a \sin b$$

$$\cos a \cos b = \sin a \sin b - \cos c$$

$$= 1 - \cos^2 a - 1 - \cos^2 b$$

$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c$$

dele, se a toma em

$$\cos^2 a + \cos^2 b = \cos^2 c$$

11º Suppor que $a + b + c = 180^\circ$, demonstrar que $\lg a + \lg b + \lg c = \lg a \lg b \lg c$

$$x = \lg a + \lg b + \lg c$$

$$y = \lg a \lg b \lg c$$

Logo $c = 180 - (a + b)$ d'onde $\text{sen } c = \text{sen } (a + b)$

A primeira expressão pôde-se escrever

$$x = \text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } (a + b)$$

As fórmulas (23) e (24) permitem que se substitua

$$\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \text{sen } \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\text{e} \quad \text{sen } (a + b) = 2 \text{sen } \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

o que dá, pondo em factor commum $2 \text{sen } \frac{a+b}{2}$

$$x = 2 \text{sen } \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right)$$

Podemos substituir $\text{sen } \frac{a+b}{2}$ por $\cos \frac{c}{2}$, e o parenthesis por

$$2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}$$

Vem finalmente

$$\text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \quad (\text{T})$$

A segunda expressão se transforma de igual maneira. Temos successivamente

$$\begin{aligned} y &= \text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } (a + b) \\ &= 2 \text{sen } \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{e enfim} \quad \text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \text{sen } \frac{a}{2} \text{sen } \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \quad (\text{U})$$

A terceira se do mesmo modo

$$\text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \text{sen } \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \text{sen } \frac{c}{2}$$

$$= \text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \cos \frac{a}{2} \text{sen } \frac{b}{2} \text{sen } \frac{c}{2}$$

12.º Para transformar a primeira a somma dos senos de uma serie de arcos em progressão arithmetica

Seja a transformar a somma

$$S = \text{sen } a + \text{sen } (a + h) + \text{sen } (a + 2h) + \dots + \text{sen } \{ a + (n-1)h \}$$

Se multiplicarmos por $2 \text{sen } \frac{h}{2}$ os dois membros da relação proposta, temos

$$2 \text{sen } \frac{h}{2} S = 2 \text{sen } a \text{sen } \frac{h}{2} + 2 \text{sen } (a + h) \text{sen } \frac{h}{2} + \dots + 2 \text{sen } [a + (n-1)h] \text{sen } \frac{h}{2}$$

Mas segundo a fórmula (26) cada duplo producto de dois senos pôde ser substituido por uma differença de dois cosenos; temos pois:

$$2 \text{sen } a \text{sen } \frac{h}{2} = \cos \left(a - \frac{h}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{h}{2} \right)$$

$$2 \text{sen } (a + h) \text{sen } \frac{h}{2} = \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{3h}{2} \right)$$

$$2 \text{sen } (a + 2h) \text{sen } \frac{h}{2} = \cos \left(a + \frac{3h}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{5h}{2} \right)$$

$$\dots \dots \dots 2 \text{sen } [a + (n-1)h] \text{sen } \frac{h}{2} = \cos \left(a + \frac{2n-3}{2}h \right) - \cos \left(a + \frac{2n-1}{2}h \right)$$

ajuntando membro a membro, temos:

$$2S \text{sen } \frac{h}{2} = \cos \left(a - \frac{h}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{2n-1}{2}h \right)$$

$$= 2 \text{sen } \left[a + \frac{n-1}{2}h \right] \text{sen } \frac{h}{2}$$

$$\text{d'onde} \quad S = \frac{\text{sen} \left(a + \frac{n-1}{2}h \right) \text{sen } \frac{h}{2}}{\text{sen } \frac{h}{2}} \quad \text{V}$$

Transforma-se de modo analogo a somma dos cosenos de n arcos em progressão arithmetica.

Acha-se que a somma

$$\cos a + \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + \dots + \cos \{ a + (n-1)h \}$$

tem por valor

$$\frac{\cos \left\{ a + \frac{n-1}{2}h \right\} \text{sen } \frac{nh}{2}}{\text{sen } \frac{h}{2}}$$

CAPÍTULO III

§ I — Construção das tabelas

Seja α um arco qualquer, menor do que $\frac{\pi}{2}$. Traçamos a circunferência unitária com centro na origem O dos eixos cartesianos. Seja A o ponto da circunferência no eixo positivo das abscissas, e B o ponto da circunferência tal que o arco AB seja igual a α . Traçamos a perpendicular BB' ao eixo das abscissas, e a perpendicular AA' ao eixo das ordenadas. O triângulo OAB é retângulo em B , e o ângulo AOB é igual a α . Logo, $OB = \cos \alpha$ e $AB = \sin \alpha$. O ponto B' está no eixo das abscissas, e o ponto A' está no eixo das ordenadas. Assim, $OB' = \cos \alpha$ e $OA' = \sin \alpha$. O ponto B' está no eixo das abscissas, e o ponto A' está no eixo das ordenadas. Assim, $OB' = \cos \alpha$ e $OA' = \sin \alpha$.

2. Theorema I

Seja α um arco qualquer, menor do que $\frac{\pi}{2}$. Traçamos a circunferência unitária com centro na origem O dos eixos cartesianos. Seja A o ponto da circunferência no eixo positivo das abscissas, e B o ponto da circunferência tal que o arco AB seja igual a α . Traçamos a perpendicular BB' ao eixo das abscissas, e a perpendicular AA' ao eixo das ordenadas. O triângulo OAB é retângulo em B , e o ângulo AOB é igual a α . Logo, $OB = \cos \alpha$ e $AB = \sin \alpha$. O ponto B' está no eixo das abscissas, e o ponto A' está no eixo das ordenadas. Assim, $OB' = \cos \alpha$ e $OA' = \sin \alpha$.

$$IB = BT = \sin \alpha$$

$$IB = IT = \cos \alpha$$

Logo, temos:

$$IB = IT = \cos \alpha$$

$$IB = IT = \cos \alpha$$

Logo, temos:

3. Corollario

Seja α um arco qualquer, menor do que $\frac{\pi}{2}$. Traçamos a circunferência unitária com centro na origem O dos eixos cartesianos. Seja A o ponto da circunferência no eixo positivo das abscissas, e B o ponto da circunferência tal que o arco AB seja igual a α . Traçamos a perpendicular BB' ao eixo das abscissas, e a perpendicular AA' ao eixo das ordenadas. O triângulo OAB é retângulo em B , e o ângulo AOB é igual a α . Logo, $OB = \cos \alpha$ e $AB = \sin \alpha$. O ponto B' está no eixo das abscissas, e o ponto A' está no eixo das ordenadas. Assim, $OB' = \cos \alpha$ e $OA' = \sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Logo, quando o arco α diminui e tende para zero, o cosseno aumenta e tende para a unidade; por conseguinte a relação

pequena e o seu seno de
o erro que comete
prio arco. O theorema

3. Theorema II

Seja α um arco qualquer, menor do que $\frac{\pi}{2}$.

Com efeito, temos:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{ou} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Observação

Seja α um arco qualquer, menor do que $\frac{\pi}{2}$. Traçamos a circunferência unitária com centro na origem O dos eixos cartesianos. Seja A o ponto da circunferência no eixo positivo das abscissas, e B o ponto da circunferência tal que o arco AB seja igual a α . Traçamos a perpendicular BB' ao eixo das abscissas, e a perpendicular AA' ao eixo das ordenadas. O triângulo OAB é retângulo em B , e o ângulo AOB é igual a α . Logo, $OB = \cos \alpha$ e $AB = \sin \alpha$. O ponto B' está no eixo das abscissas, e o ponto A' está no eixo das ordenadas. Assim, $OB' = \cos \alpha$ e $OA' = \sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

3. Theorema III

Seja α um arco qualquer, menor do que $\frac{\pi}{2}$. Traçamos a circunferência unitária com centro na origem O dos eixos cartesianos. Seja A o ponto da circunferência no eixo positivo das abscissas, e B o ponto da circunferência tal que o arco AB seja igual a α . Traçamos a perpendicular BB' ao eixo das abscissas, e a perpendicular AA' ao eixo das ordenadas. O triângulo OAB é retângulo em B , e o ângulo AOB é igual a α . Logo, $OB = \cos \alpha$ e $AB = \sin \alpha$. O ponto B' está no eixo das abscissas, e o ponto A' está no eixo das ordenadas. Assim, $OB' = \cos \alpha$ e $OA' = \sin \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

substitue-se $\sin \frac{a}{2}$ pela quantidade maior $\frac{a}{2}$, o segundo membro estando diminuído, temos :

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}$$

D'outra parte, se, na mesma relação, substituirmos $\sin \frac{a}{2}$ pela quanti-

menor $\frac{a}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2} \right)^3$ (n.º 54, Observação) ou $\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}$, o segundo mem-

bro será augmentado, e poderemos escrever

$$\cos a < 1 - 2 \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32} \right)^2 \text{ ou } \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{2a^6}{32^2}$$

Por conseguinte $\cos a$ está comprehendido entre $1 - \frac{a^2}{2}$ e $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$, e póde-se escrever :

$$1 - \frac{a^2}{2} < \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$$

Se a for muito pequeno, a expressão $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$ será mais exacta do que a primeira, e teremos

36. **Calculo de $\sin 10''$ e de $\cos 10''$.** O comprimento do arco de $10''$ é de 59...; elle contém $180 \times 60 \times 60 = 648\,000''$.

Logo, se $\sin 10'' = x$, teremos $0,000\,013\,491\,253\,117$.

Para achar $\cos 10''$, basta notar que $\cos 10'' = \sqrt{1 - \sin^2 10''}$, se substituímos

o valor de $\sin 10''$ na expressão $\sqrt{1 - x^2}$, teremos $\cos 10'' = 0,999\,999\,999\,986\,508\,882$.

Logo, o valor de $\sin 10''$ será mais exacto do que o de $\cos 10''$, e teremos

$$\sin 10'' = 0,000\,013\,491\,253\,117$$

Se a for muito pequeno, a expressão $1 - \frac{a^2}{2}$ será mais exacta do que a primeira, e teremos

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{2a^6}{32^2}$$

Se a for muito pequeno, a expressão $1 - \frac{a^2}{2}$ será mais exacta do que a primeira, e teremos

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{2a^6}{32^2}$$

Se a for muito pequeno, a expressão $1 - \frac{a^2}{2}$ será mais exacta do que a primeira, e teremos

Se a for muito pequeno, a expressão $1 - \frac{a^2}{2}$ será mais exacta do que a primeira, e teremos

37. **Formulas de Simpson.** — Calculo dos senos e cosenos dos arcos de $10''$ em $10''$.

Addicionando membro a membro as fórmulas (8) e (10), depois as formulas (9) e (11) obtemos :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\text{a 1.ª dá } \sin(a+b) = \sin a \cdot 2 \cos b - \sin(a-b)$$

$$\text{e a 2.ª } \cos(a+b) = \cos a \cdot 2 \cos b - \cos(a-b)$$

Se fizermos $a = mb$, estas formulas tornam-se :

$$\sin(m+1)b = \sin mb \cdot 2 \cos b - \sin(m-1)b$$

$$\cos(m+1)b = \cos mb \cdot 2 \cos b - \cos(m-1)b$$

Elas permitem calcular os senos e cosenos dos arcos

$$b, 2b, 3b, 4b, \dots mb, (m+1)b$$

conhecendo $\sin b$ e $\cos b$.

Supponhamos $b = 10''$; fazendo successivamente $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc., vem :

$$\sin 20'' = \sin 10'' \cdot 2 \cos 10'' - 0 \quad \cos 20'' = \cos 10'' \cdot 2 \cos 10'' - 1$$

$$\sin 30'' = \sin 20'' \cdot 2 \cos 10'' - \sin 10'' \quad \cos 30'' = \cos 20'' \cdot 2 \cos 10'' - \cos 10''$$

$$\sin 40'' = \sin 30'' \cdot 2 \cos 10'' - \sin 20'' \quad \cos 40'' = \cos 30'' \cdot 2 \cos 10'' - \cos 20''$$

$$\sin 50'' = \sin 40'' \cdot 2 \cos 10'' - \sin 30'' \quad \cos 50'' = \cos 40'' \cdot 2 \cos 10'' - \cos 30''$$

$$\dots \dots \dots$$

Simplificação a partir de $30''$. A partir de $30''$, o calculo de \sin e \cos se reduz a uma simples diminuição.

Com efeito, temos $\sin 30'' = \frac{1}{2}$; logo as relações (23) e (27)

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot 2 \cos b - \sin(a-b)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot 2 \cos b - \cos(a-b)$$

dão :

$$\sin 20'' = \sin 30'' \cdot 2 \cos 10'' - \sin 10''$$

$$\cos 20'' = \cos 30'' \cdot 2 \cos 10'' - \cos 10''$$

Se supuzermos b inferior a $30''$, teremos a conhecido nos segundos membros. Uma substituição dará o seno ou o coseno de cada um dos arcos $m \cdot 10''$ comprehendidos entre $30''$ e $90''$.

Simplificação a partir de $45''$. Para continuar o calculo além de $90''$, visto que cada um dos arcos $m \cdot 10''$ é o complemento de um arco cujo seno e coseno são conhecidos, teremos

$$\sin(45'' + 10'') = \cos 45'' = \sin 45''$$

$$\cos(45'' + 10'') = \sin 45'' = \cos 45''$$

38. **Observações.** 1. Se seguíssemos o systema que acabamos de indicar para calcular os senos e os cosenos, seria necessário ter a mão um livro de verificação, pois um erro commettido em uma operação tornaria errados todos os calculos seguintes. Além disso, os valores da

e de cos $10'$ sendo somente approximados, os erros vão se accumulando, e chegam a ser consideráveis, quando se effectuam os calculos, e podem chegar a ser de $10'$. Para remediar este inconveniente, convém haver sempre directamente os senos e cosenos de certos arcos convenientemente escolhidos, a fim de verificar os resultados obtidos. Esta questão já foi tratada n.º 31; por meio das formulas do n.º 30, pode-se ter directamente os senos e os cosenos de $30'$ em $30'$. Poder-se-hia também tomar esses valores, calculados directamente com uma imaginação sufficiente, como ponto de partida de uma nova serie de operações que se effectuariam com as formulas de Simpson.

II. Algumas obras escriptas contem os valores numericos ou valores naturaes das funcções trigonometricas; mas na maior parte das applicações os calculos fazem-se por meio dos logarithmos; é essa a razão porque as taboas usuaes só dão os logarithmos desses valores, e contem-nham-se em inscrever n'essas taboas os logarithmos das quatro funcções: sen, cos, tg e cotg. De houvresse necessarios os logarithmos da secante e da cosecante, bastaria tomar os complementos do coseno e do seno, visto que estas mesmas taboas são as inversas das outras duas.

§ II. — Taboa dos logarithmos das funcções trigonometricas Disposição e uso das taboas.

39. Existem duas especies de taboas trigonometricas:

1.ª As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes.

2.ª As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

As taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções, são as taboas de senos e cosenos, e de tangentes e cotangentes, e de secantes e cosecantes, e de logarithmos das mesmas funcções.

calcular os logarithmos intermediarios. 1.º mesmo se dá com as tangentes, etc. Essas differenças são positivas para os senos e as tangentes, porque estas funcções crescem com o arco, e negativas para os cosenos e as cotangentes, que diminuem quando o arco augmenta.

As taboas de Lalande e de Bouguer contem, alem disso, taboas de partes proporcionaes que dispensam certos calculos que se é obrigado a fazer quando se trabalha com as taboas de Lalande.

A mesma columna de differenças se refere ao mesmo tempo às tg e cotg; pois, estas funções sendo inversas, tem-se para dois arcos consecutivos a e b: $\lg a \cdot \cotg a = \lg b \cdot \cotg b$; d'onde $\frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\cotg b}{\cotg a}$, e applicando

os logarithmos: $\log \lg a - \log \lg b = \log \cotg b - \log \cotg a$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos das secantes e dos

logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$$\frac{\sec a \cos b}{\cos a \sec b}; \text{ applicando-se}$$

os logarithmos: $\log \sec a + \log \cos b = \log \cos a + \log \sec b$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos das secantes e dos logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$$\frac{\sec a \cos b}{\cos a \sec b}; \text{ applicando-se}$$

os logarithmos: $\log \sec a + \log \cos b = \log \cos a + \log \sec b$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos das secantes e dos logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$$\frac{\sec a \cos b}{\cos a \sec b}; \text{ applicando-se}$$

os logarithmos: $\log \sec a + \log \cos b = \log \cos a + \log \sec b$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos das secantes e dos logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$$\frac{\sec a \cos b}{\cos a \sec b}; \text{ applicando-se}$$

os logarithmos: $\log \sec a + \log \cos b = \log \cos a + \log \sec b$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos das secantes e dos logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$$\frac{\sec a \cos b}{\cos a \sec b}; \text{ applicando-se}$$

os logarithmos: $\log \sec a + \log \cos b = \log \cos a + \log \sec b$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos das secantes e dos logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$$\frac{\sec a \cos b}{\cos a \sec b}; \text{ applicando-se}$$

os logarithmos: $\log \sec a + \log \cos b = \log \cos a + \log \sec b$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos das secantes e dos logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$$\frac{\sec a \cos b}{\cos a \sec b}; \text{ applicando-se}$$

rença tabular — 25. Ora, a diferença entre o log. cos $63^{\circ}10'$ e o log. dado $\frac{14 \times 60}{25} = 34''$, e o arco que se procura é $x = 63^{\circ}10'34''$.

O mesmo calculo, feito com as taboas de Dupuis, pôde-se escrever :

	log cos $x = 1,6544147$	
Diff. 416	para 335	$63^{\circ}10'30''$
1 ^a diferença	188	
para	167	4'
2 ^a diferença	21	
para	21	0",5
		$x = 63^{\circ}10'34",5$

do mesmo modo para as outras linhas trigonometricas : para as tg, fazem-se os mesmos calculos que para os senos, e para os cosenos, os mesmos calculos que para os senos.

Observação. — Nas instrucções que acompanham todas as taboas de trigonometria, encontram-se algumas explicações sobre a exactidão os log. dos sen e das tg dos arcos muito pequenos, e os dos cos e das cotg dos arcos muito proximos de 90° ; é util conhecer esses meios, e em certos casos convém consultal-os; mas para isso são precisas certas explicações que não têm cabimento n'este logar.

Aplicações

1^a Calcular o mais pequeno arco positivo que satisfaça a equação :

$$\sin x = \frac{2}{3}$$

Applicando os logarithmos, temos :

$$\log \sin x = \log 2 - \log 3$$

$$\log \sin x = 0,3010300 - 0,4771212 = \overline{1},8239088$$

$$\log \sin 41^{\circ}48'30'' = \overline{1},8238919 \quad (\text{Diff. } 236.)$$

$$x = 41^{\circ}48'30''$$

d'onde

$$y = 41^{\circ}14'34",6$$

Por conseguinte

3^a Achar o menor valor positivo de x que satisfaça a equação :

$$\lg x = +\sqrt{2}$$

Applicando os logarithmos, temos :

$$\log \lg x = \frac{1}{2} \log 2 = 0,1505150$$

que corresponde a

4^a Calcular o angulo x comprehendido entre 0° e 90° que satisfaça a equação $\sin x = \sin P + \sin Q$, no caso em que $P = 28^{\circ}19'37''$, e $Q = 16^{\circ}47'3''$.

Sabemos que $\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P+Q) \cos \frac{1}{2}(P-Q)$

$$\text{Logo } \sin x = 2 \sin \frac{1}{2}(45^{\circ}6'41'') \cos \frac{1}{2}(11^{\circ}32'33",8)$$

$$\text{d'onde } = 2 \sin 22^{\circ}33'20",5 \cos 5^{\circ}46'16",9$$

$$\text{d'onde } \log \sin x = \log 2 + \log \sin 22^{\circ}33'20",5 + \log \cos 5^{\circ}46'16",9$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log \sin 22^{\circ}33'20",5 = \overline{1},5838374$$

$$\log \cos 5^{\circ}46'16",9 = \overline{1},99$$

$$\log \sin x = 1,8748674$$

logo

$$x = 49^{\circ}47'13''$$

5^a Calcular o angulo x tal que $\tan x = \tan A + \tan B$, sabendo que $A = 38^{\circ}24'30''$ e $B = 49^{\circ}19'40''$.

Temos : $\lg x = \lg A + \lg B$ ou (n^o 48, fórmula 23, :

$$\lg x = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B}$$

portanto applicando os logarithmos :

$$\lg x = \lg \sin A + \lg \cos B - \lg \cos A$$

$$\text{ou } \log \sin A = \overline{1},8090385$$

$$\log \cos B = \overline{1},8090385$$

logo

$$x = 49^{\circ}47'13''$$

$$\log \cos A = \overline{1},8090385$$

Tornemos logarithmica a quantidade debaixo do radical; é a differença de dois quadrados, logo podemos escrever:

$$\text{ou } \frac{(\sin x \sin \beta + \cos x \cos \beta)(\sin x \sin \beta - \cos x \cos \beta)}{\cos(x - \beta) \cos(x + \beta)}$$

Para que o valor de x seja real, é preciso que estes dois factores sejam mesmo signal; ora, essa condição está satisfeita, porque, dados, elles são ambos positivos.

$$\text{Logo } \log x = \log R + \frac{\log \cos(x - \beta) + \log \cos(x + \beta)}{2}$$

$$\log x = \log 6366,73 + \frac{1}{2} (\log \cos 18^\circ 49' 11'' + \log \cos 63^\circ 25' 15'')$$

$$\log \cos(x - \beta) = 1,9784382$$

$$\log \cos(x + \beta) = 1,6509814$$

$$1,6271196$$

$$\text{a metade} = 1,$$

$$\log 1:$$

$$\log x$$

$$x = 4144^{\circ}, 54$$

Limite ou verdadeiro valor de algumas expressões trigonometricas.

Julgamos útil recordar aqui algumas definições dadas no estudo da algebra.

Definições. — 1º Diz-se que uma variavel tende para zero, quando se dá um numero dado, por menor que seja.

2º Diz-se que uma variavel tende para o infinito quando seu valor absoluto torna-se e fica depois constantemente superior a qualquer numero dado, por

3º Diz-se que uma variavel x tende para a , ou tem por limite a , quando a differença $x - a$ tende para zero.

Assim, designando um numero positivo dado, tão pequeno quanto

$$x - a < \epsilon$$

$$a$$

Consequencia. — Se um x iguala le entre duas funções de x converte-se constantemente verdadeira quando x tende para a , e a ar d é verdadeira no limite para $x = a$.

Theorema. — O limite de $\frac{\sin x}{x}$, para $x = 0$, é igual d unidade.

Supponhamos que o arco x tende para zero por valores positivos, temos n.º 52,

$$\sin x < x < \lg x$$

Dividindo $\sin x$ por estas tres quantidades crescentes, obtem-se as razões decrescentes

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\lg x}$$

ou

Assim, a differença $1 - \frac{\sin x}{x}$ é menor que a differença $1 - \cos x$; ora quando x tende para zero, esta ultima differença tende para zero; logo, com maior razão, a primeira tende tambem para zero; isto é, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Quando um arco tende para zero, a razão do seno ao arco tem por limite a unidade.

Observação. — As razões inversas $\frac{x}{\sin x}$ e $\frac{1}{\sin x}$ tendem simultaneamente para a unidade (n.º 52): a primeira por meio de valores crescentes, a segunda por valores decrescentes.

Theorema II. — O limite de $\frac{\cos x - 1}{x}$, quando x tende para zero, é igual a unidade.

Sejam arco $MM' = 2x$ d'onde corda $MM' = 2 \sin x$. Temos identicamente

$$\frac{\text{corda } MM'}{2 \sin x} = \frac{2 \sin x}{2 \sin x}$$

Para $x \rightarrow 0$, temos $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Corollario II. — O limite de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, quando x tende para zero, é igual a unidade.

Temos identicamente

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Esta igualdade, para $x \rightarrow 0$, dá

Substituindo simultaneamente o $\frac{1}{\cos x}$ factor por seu limite, obtemos

$$\lim. \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim. \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim. \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

Verdadeiro valor de uma função que se apresenta debaixo de uma das formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$.

Quando uma função de x toma uma forma indeterminada para $x=a$, sempre quando se dá a $x=a$, tende esta função quando x tende para a .

Tirar a indeterminação, é achar esse limite.

Quando uma expressão fraccionaria toma a forma $\frac{0}{0}$ para $x=a$, isso quer dizer que os dois termos têm um factor common, que se annulla por $x=a$. Supprimindo este factor common, obtem-se uma nova fracção que, sendo constantemente finita, dá o limite da função para $x=a$. A nova fracção toma, para $x=a$, um valor bem determinado. Esse valor é o limite da função proposta para $x=a$.

Para tirar a indeterminação de uma expressão, das formas elementares, basta, pois, simplificar esta expressão ou transformá-la em uma expressão equivalente, antes de lhe impor a hypothese $x=a$.

Algumas vezes é necessario pôr em evidencia as razões.

$$\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}, \quad \frac{\operatorname{tg}(x-a)}{x-a},$$

ou suas inversas, que têm por limite a unidade quando x tende para a .

Eis alguns exemplos:

I. Valor da expressão

$$y = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}, \text{ para } x=0$$

Se fizermos $x=0$, esta expressão toma a forma $\frac{0}{0}$; mas as identidades

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos x}$$

permitem escrever

$$y = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

Logo, para $x=0$, $\lim. y = 0 \times 1 = 0$

$$\text{Logo, para } x=0, \quad y = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} \text{ para } x=0$$

Temos identicamente (nº 39):

$$y = \frac{2 \operatorname{sen}^2 2x}{2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 4 \cos^2 x$$

Logo, para $x=0$, $\lim. y = 4 \times 1 = 4$

III. Valor da expressão

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x - a}$$

Na hypothese de $x=a$, a expressão se apresenta debaixo da forma $\frac{0}{0}$ mas a identidade (pag. 58, 5º,

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{sen}(x+a) \operatorname{sen}(x-a)$$

permite que se escreva $y = \operatorname{sen}(x+a)$

Logo, para $x=a$, $\lim. y = \operatorname{sen} 2a$

IV. Valor da expressão

$$y = \frac{\cos(x+a) \cos(x-a)}{\cos(x+a) - \cos(x-a)} \text{ para } x=a$$

Para $x=a$, os termos $\cos(x+a)$ e $\cos(x-a)$ são iguais, e a expressão toma a forma $\frac{0}{0}$.

$$y = \frac{\cos(x+a) \cos(x-a)}{\operatorname{sen} \frac{x+a}{2} \operatorname{sen} \frac{x-a}{2}}$$

ou, dividindo os valores superiores e inferiores por $\operatorname{sen} \frac{x-a}{2}$:

$$y = \frac{2 \cos(x+a) \cos \frac{x-a}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x+a}{2}}$$

Logo, para $x=a$,

$$\lim. y = \frac{2 \cos 2a}{\operatorname{sen} a} = \frac{2 \cos 2a}{\operatorname{sen} a}$$

V. Valor da expressão

$$y = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \text{ para } x=90^\circ$$

Esta expressão toma a forma $\frac{0}{0}$; mas pôde se puzer a seguinte:

$$y = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{1 - \operatorname{sen} x}$$

ou, supprimando o factor $\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$

$$y = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$$

Para $x=90^\circ$, obtem-se $y=\sqrt{0}$

Logo, quando x tende para 90° , a função y tende para o infinito.

VI. Valor da expressão

$$\frac{\sin mx}{nx} \text{ para } x=0$$

Póde-se escrever :

$$\frac{\sin mx}{nx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin mx}{mx}$$

Ora para $x=0$, $\lim. \frac{\sin mx}{mx} = 1$

Por conseguinte, $\lim. \frac{\sin mx}{nx} = 1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin mx}{mx} = \frac{1}{n}$

VII. Valor da expressão

$$y = \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \text{ para } x=a$$

Temos identicamente

$$y = \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2}$$

Logo, para $x=a$,

$$\lim. y = 1 \times \cos \frac{a+a}{2} = \cos a$$

VIII. Valor da expressão

$$\frac{\sin x}{x} \text{ para } x=90^\circ$$

Esta expressão toma a forma indeterminada $\infty - \infty$;

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$$

Logo, para $x=90^\circ$, temos :

$$\lim. \frac{\sin x}{x} = \lim. \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 0$$

$$\lim. \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 0$$

Logo, para $x=90^\circ$, a expressão toma a forma $\frac{0}{0}$; mas d

CAPITULO III. — TABOAS TRIGONOMETRICAS.

vidindo primeiramente os valores superiores e inferiores por $\lg x$, e fazendo depois $x=90^\circ$, temos :

$$\lim \frac{\lg x + 1}{\lg x - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Além d'isto, temos identicamente :

$$\frac{\lg x + 1}{\lg x - 1} = -\frac{1 + \lg x}{1 - \lg x} = -\lg (45^\circ + x)$$

Logo, para $x=90^\circ$,

$$\lim \frac{\lg x + 1}{\lg x - 1} = -\lg 135^\circ = \lg 45^\circ = 1$$

X. Limite da razão $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ quando h tende para 0.

Podemos escrever :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Logo, para $h=0$,

$$\lim \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 1 \times \cos x = \cos x$$

Tal é o limite da razão do accrescimento do seno para o accrescimento do arco, quando este ultimo accrescimento tende para zero.

Acha-se do mesmo modo, para $h=0$,

$$\lim \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

$$\lim \frac{\lg(x+h) - \lg x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

CAPITULO IV

EQUAÇÕES TRIGONOMETRICAS

Expressões equivalentes. — Diz-se que duas expressões trigonométricas são equivalentes, quando seus valores numéricos são sempre iguaes, quaesquer que sejam os valores attribuidos aos arcos que ellas contêm.

Doas especies de igualdades. — O signal $=$, collocado entre duas expressões trigonométricas, significa a igualdade de seus valores para certos valores attribuidos aos arcos que ellas contêm.

Identidade. — Quando a igualdade de duas expressões trigonométricas se verifica para todos os valores attribuidos aos arcos que ellas contêm, a igualdade é denominada identidade. e todas as igualdades que podem ser deduzidas por meio de calculo, são identidades.

Exemplo: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ é uma identidade, porque para qualquer valor de x , a expressão $\sin^2 x + \cos^2 x$ sempre dá o resultado 1.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Exemplo: $\sin x = \cos x$ e $\tan x = 1$ e por diversos arcos

Exemplo: $\sin x = \cos x$ e $\tan x = 1$ e por diversos arcos

Exemplo: $\sin x = \cos x$ e $\tan x = 1$ e por diversos arcos

Exemplo: $\sin x = \cos x$ e $\tan x = 1$ e por diversos arcos

§ I. — Equações a uma incognita.

O methodo que geralmente se emprega para resolver equações trigonométricas consiste em transformar a equação dada em uma linha trigonométrica.

1º Escolhe-se como incógnita, ou uma linha trigonométrica, ou de qual quer tipo d'esse arco, ou de qual quer tipo do arco procura-lo.

2º Substitue-se, em função da incógnita adotta, as linhas trigonométricas que a contêm.

3º Por meio das tabelas trigonométricas, reduz-se a equação a uma única equação de primeira ordem, e procura-se a solução.

4º Cada uma das raizes aceitaveis fornece uma equação trigonométrica simples, de uma das formas

$$\sin x = a, \quad \cos x = b, \quad \tan x = c$$

Por meio das tabelas determina-se um angulo verificando cada uma d'essas equações (nº 6 e pag. 70); depois d'isso, as formulas dos arcos tendo uma linha trigonométrica dada (nº 20 e seguintes) permite escrever todas as soluções.

Eis alguns exemplos:

1. Resolver a equação

$$3 \lg^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$$

Resolução: Multiplicando ambos os membros da equação por $\cos x$, temos:

$$3 \lg^2 x \cos x + 5 \cos x = 7$$

$$3 \lg^2 x \cos x = 7 - 5 \cos x$$

$$\lg^2 x \cos x = \frac{7 - 5 \cos x}{3}$$

$$\lg^2 x = \frac{7 - 5 \cos x}{3 \cos x}$$

$$\lg x = \sqrt{\frac{7 - 5 \cos x}{3 \cos x}}$$

$$x = \arctan \sqrt{\frac{7 - 5 \cos x}{3 \cos x}}$$

$$x = \arctan \sqrt{\frac{7 - 5 \cos x}{3 \cos x}}$$

2º MATHODO. Se substituirmos $\cos x$ em função de $\lg x$, a equação torna-se

$$3 \lg^2 x + 5 = \pm 7 \sqrt{1 + \lg^2 x} \quad (2)$$

esta equação, porém, não é equivalente á proposta; pois, com as soluções d'esta, ella admite mais as soluções da equação

$$3 \lg^2 x + 5 = -\frac{7}{\cos x} \quad (3)$$

Elevando ao quadrado os dois membros de (2), chega-se á equação

$$9 \lg^4 x - 19 \lg^2 x - 24 = 0$$

$$\lg^2 x = \frac{19 \pm \sqrt{145}}{18}$$

ou, eliminando as raizes imaginarias

$$\lg x = \pm \sqrt{3}$$

Os primeiros membros das equações (1) e (3) sendo essencialmente positivos, e os segundos membros sendo de signações contrarias, a equação (3) não se verifica, e a equação (1) torna-se, conforme ella torna positivo $\cos x$ ou $-\cos x$, isto é conforme o coseno do arco considerado é positivo ou negativo.

Ora, os arcos comprehendidos nas fórmulas (1), terminam em quatro pontos do circulo trigonometrico, respectivamente situados em cada um dos quadrantes. Os arcos

$$(2k+1)\pi \pm 60$$

cujas extremidades cahem no segundo e no terceiro quadrante têm seus cosenos negativos e devem ser rejeitados.

Os arcos $2k\pi \pm 60$

terminam no primeiro e no quarto quadrante são os unicos que res-

olver a equação

$$2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2} \quad (1)$$

Toma-se para o segundo membro

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$4 \cos^2 \frac{x}{2} - 4 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Mas $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Logo $\frac{x}{2} = 2k\pi \pm 60^\circ$

e emfim $x = 4k\pi \pm 120^\circ$

2º MATHODO. Se tomarmos por incognita $\cos x$, é preciso effectuar a substituição irracional

obtem-se $2 \cos x + 3 = \pm 4 \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad (2)$

Mas esta equação é mais geral do que a proposta; pois, com as soluções de (1), ella admite tambem as da equação

$$2 \cos x + 3 = -4 \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

Elevando ao quadrado os dois membros de (2), chega-se á equação

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0$$

d'onde $\cos x = -\frac{1}{2}$

e por conseguinte $x = 2k\pi \pm 120^\circ$

Um arco x comprehendido n'esta fórmula verifica a equação (1) ou a equação (3), segundo que $\cos \frac{x}{2}$ é positivo ou negativo. Ora, os arco

metades $\frac{x}{2} = k\pi \pm 60^\circ$

terminam no primeiro ou no quarto quadrante quando k é um numero par, e no segundo ou no terceiro quadrante quando k é um numero impar. Para tanto as soluções de (1), dadas pelos valores pares de k , e as de (3) acham-se comprehendidas na fórmula $x = 4k'\pi \pm 120^\circ$ k' designando um numero inteiro qualquer.

Observação. Se compararmos entre si os dois methodos seguidos nos exemplos I e II, é evidente que as substituições irracionais devem ser evitadas.

III. Resolver a equação

$$3 \sqrt{1 - \cos x} = \sin^2 x$$

1º MATHODO. A expressão de $\cos x$ em função de $\sin x$ é conhecida, enquanto que $\sin^2 x$ exprime-se racionalmente em função de $\sin x$. Logo, a equação dada em duas litteras $\sin x$ e $\cos x$, é pois a segunda que é preferavel para ser tomada para incognita.

A equação fica sendo

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

d'ella extrahe-se

$$\cos x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

ou rejeitando a raiz inaceitavel

$$\cos x = 1$$

resulta

$$x = 2k\pi$$

2º METHODO. Podemos substituir

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

A equação toma a forma

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \left(3 - 2 \cos^2 \frac{x}{2} \right) = 0$$

O factor entre parenthesis não póde annullar-se, visto que um sen não ha-se comprehendido entre -1 e $+1$.

A equação proposta reduz-se pois a

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$$

d'onde

$$\frac{x}{2} = k\pi$$

e emfim

$$x = 2k\pi$$

IV. Resolver a equação

$$\sec x - \cos x = \operatorname{sen} x \quad (1)$$

1º METHODO. As tres linhas trigonometricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\sec x$ não podem ser expressas racionalmente em funcção de uma mesma linha do arco x , mas ellas podem sê-lo em funcção de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (nº 38).

Tomando esta ultima linha para incognita, a equação torna-se

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

ou reduzindo ao mesmo denominador

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1)}{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})} = 0$$

Para a equação ser verdadeira ao conjuncto das tres seguintes

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \quad \text{d'onde} \quad x = 2k\pi$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 \quad \text{d'onde} \quad x = (2k+1)\pi$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0$$

d'onde

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

isto é (nº 36, form. 16)

$$\operatorname{tg} x = 1$$

por conseguinte

$$x = k\pi + 45^\circ$$

2º METHODO. Se substituirmos $\sec x$ em funcção de $\cos x$, chegamos á equação

$$\frac{1 - \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} = 0$$

ou, substituindo $1 - \cos^2 x$ por $\operatorname{sen}^2 x$, pondo $\operatorname{sen} x$ em factor e effectuando a divisão

$$\operatorname{sen} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

esta equação decompõe-se em outras duas :

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi$$

e

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi + 45^\circ$$

Artificios de calculo. Abandona-se o methodo geral desde que se apresenta um meio especial que leve ao resultado de um modo mais rapido. O habito de calcular dá a perceber esses processos expeditos.

Assim, o segundo methodo indicado para resolver cada uma das duas equações precedentes consiste em transformar o primeiro membro em um producto de muitos factores, depois, em decompôr a equação proposta em outras tantas equações parciaes.

Eis mais alguns exemplos :

V. Resolver a equação

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$$

1º METHODO. Em lugar de substituir $\operatorname{sen} 3x$ em funcção de $\operatorname{sen} x$, façamos passar tudo para o primeiro membro, transformemos depois este em producto. A equação torna-se

$$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = 0$$

elle decompõe-se em outras duas :

$$\cos 2x = 0 \quad \text{d'onde} \quad 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{e} \quad \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi$$

2º METHODO. Para exprimir que os arcos x e $3x$ têm senos iguaes, applicalhes as fórmulas conhecidas 1.

Obtem-se assim as duas equações algebricas seguintes :

$$3x = 2k\pi + x \quad \text{e} \quad 3x = 2k\pi + (\pi - x)$$

d'onde se tira respectivamente

$$x = k\pi \quad \text{e} \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

VI. Resolver a equação

$$\lg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \lg\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

1º Método. Esta equação pôde-se escrever

$$\lg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \lg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\text{ou (nº 48)} \quad \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = 0$$

ou simplesmente

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

d'ella tira-se

$$x - \frac{\pi}{2} = k\pi$$

d'onde

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

2º Método. Para que dois arcos tenham a mesma tangente, é preciso e sufficiente que sua differença seja igual a $k\pi$ (nº 21).

A equação proposta equivale pois á equação algebrica

$$\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = k\pi$$

de 21

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

III. Resolver a equação

$$\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$$

Se a equação se transformar em producto, a equação fica sendo

$$2\cos 2x \cos x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2\cos x - 1) = 0$$

Esta equação divide-se em duas equações parciaes que se resolvem separadamente.

IV. Resolver a equação

$$\cos a - \cos x = \sin(x - a)$$

Transformando o primeiro membro em producto e substituindo o

segundo em função do seno e do coseno do arco $\frac{x-a}{2}$ a equação pôde escrever-se

$$2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x-a}{2}$$

ou

$$\sin \frac{x-a}{2} \left(\sin \frac{x+a}{2} - \cos \frac{x-a}{2} \right) = 0$$

Elle se decompõe em outras duas facéis de resolver.

Aplicações importantes.

IX. Resolver e discutir a equação

$$a \sin x + b \cos x = c$$

1º Método. Com o fim de tornar logarithmico o primeiro membro, dividem-se todos os termos da equação por a , depois põe-se

$$\frac{a}{a} = \lg \varphi \quad (1)$$

A equação proposta torna-se successivamente

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

e

$$\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos x = \frac{c}{a}$$

ou, eliminando o denominador

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

isto é

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi \quad (2)$$

Procura-se nas taboas um angulo φ que verifique a equação (1); depois disso, se as taboas dão um angulo α tal que $\sin \alpha = \frac{c}{a}$, a equação (2) traduz-se pelas duas equações algebricas

$$x + \varphi = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad x + \varphi = 2k\pi + \pi - \alpha$$

d'onde se tira

$$x = 2k\pi + \alpha - \varphi \quad \text{e} \quad x = 2k\pi + \pi - \alpha - \varphi$$

Condição de possibilidade. O angulo α só existe se houver

$$-1 \leq \frac{c}{a} \cos \varphi \leq +1$$

Isto é

$$\frac{c^2 \cos^2 \varphi}{a^2} \leq 1$$

mos $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$

A condição de possibilidade torna-se

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

ella é independente dos signaes dos tres coefficients.

2º MATHODO. Sen x e $\cos x$ podendo exprimir-se racionalmente em $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, toma-se esta ultima linha para incognita auxiliar; a equação fica sendo

$$a \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + b \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = c$$

Ella equivale á equação inteira

$$(b + c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - (b - c) = 0$$

que tem como raizes

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}$$

as raizes são reaes quando temos

$$a^2 + b^2 \leq c^2$$

Elas não estão sujeitas a nenhuma condição de grandeza; mas, como os seus calculos se fazem por logaritmos, não se pôde geralmente empregar a equação depois de transformada.

MATHODO. Se substituirmos $\sin x$ e $\cos x$ em função de $\operatorname{tg} x$,

$$\operatorname{tg} x + b \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} = c \quad (3)$$

$$x^2 - 2c \operatorname{tg} x + 2ab \operatorname{tg} x + b^2 - c^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a}$$

Essas fórmulas não são logarítmicas, ellas têm o inconveniente de serem indeterminadas, pois a equação (3) equivale a duas seguintes

$$a \sin x + b \cos x = \pm c$$

CAPITULO IV. — EQUAÇÕES TRIGONOMETRICAS.

1º MATHODO. Substituindo $\cos x$ em função de $\sin x$,

$$a \sin x \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = c$$

$$\text{ou} \quad (a^2 + b^2) \sin^2 x - 2ac \sin x + c^2 - b^2 = 0$$

$$\text{por conseguinte} \quad \sin x = \frac{ac \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$$

Esta fórmula apresenta todas as desvantagens da precedente, porque não é logarítmica.

$$a \sin x \pm b \cos x = c$$

Alem d'isso, a discussão é mais complicada.

Assim, no caso geral, a resolução da equação (3) não é mais vantajosa que a da equação (1).

X. Resolver a equação

$$a \operatorname{tg} x + b \cotg x = c$$

1º MATHODO. Dá-se a esta equação a forma da precedente. Ella pôde escrever-se

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\sin x} = c$$

$$\text{ou} \quad a \sin^2 x + b \cos^2 x = c \sin x \cos x$$

Multiplicando os dois membros por 2 e substituindo $\sin 2x$ por $2 \sin x \cos x$,

$$2a \sin^2 x + 2b \cos^2 x = c \sin 2x$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

obtemos

$$a(1 - \cos 2x) + b(1 + \cos 2x) = c \sin 2x$$

$$\text{ou} \quad c \sin 2x + (a - b) \cos 2x = a + b$$

Equação da mesma forma que a precedente. (Ex. XI.)

2º MATHODO. Substituindo $\cotg x$ em função de $\operatorname{tg} x$, chega-se á equação do segundo gráo

$$a \operatorname{tg}^2 x - c \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\text{de onde se tira} \quad \operatorname{tg} x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

Estas raizes são facies de discutir, pois os valores correspondentes de x , é preciso que sejam reais e logarítmicas.

XI. Resolução trigonométrica da equação do segundo gráo

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c$$

Propomos-nos resolver esta equação por meio de uma equação trigonométrica

Escreva-se então-se $x = \lg a$ • (1)

A equação torna-se

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Para reduzir esta equação a uma forma conhecida (Ex. IX), substitua-se $\lg a$ em função de $\sin a$ e de $\cos a$, depois eliminam-se os denominadores; o que dá

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Então multiplicam-se todos os termos por 2 e operam-se as substituições

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad 2 \sin x \cos x = \sin 2x, \\ 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

Agrupando os termos que contêm sómente uma linha trigonométrica

$$b \sin 2x - (a - c) \cos 2x + a + c = 0$$

da forma annunciada.

Se dividirmos tudo por b e puzermos

$$\frac{a-c}{b} = \lg \varphi \quad (2)$$

esta equação pôde escrever-se

$$\sin(2x - \varphi) = -\frac{a+c}{b} \cos \varphi$$

$$\text{ou} \quad \sin(2x - \varphi) = -\frac{a+c}{b} \cos \varphi \quad (3)$$

A condição de possibilidade

$$\frac{(a+c)^2}{b^2} \cos^2 \varphi \leq 1$$

por causa de (1), fica sendo

$$\frac{(a+c)^2}{b^2} \leq 1$$

$$a^2 + c^2 + 2ac \leq b^2$$

Se por meio das taboas, um ângulo $2x - \varphi$, o que dá para as soluções da

$$2x - \varphi = 2\pi - \varphi \quad \text{e} \quad 2x - \varphi = 2\pi - \varphi$$

teremos

$$2x = 2\pi - \varphi + \varphi = 2\pi$$

$$x = \pi$$

A equação (1) dá então as raizes procuradas

$$x' = \lg \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \lg \frac{\varphi - \varphi_1}{2}$$

§ II. Equações simultaneas.

XII. Problema. Achar dois arcos, conhecendo sua somma assim como a somma ou o producto ou o quociente de seus senos.

$$1^\circ \text{ Resolver o systema. } \begin{cases} x + y = a \\ \sin x + \sin y = m \end{cases} \quad (1)$$

(2)

A equação (2) pôde escrever-se (23

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = m$$

d'ella se tira, tendo em conta (1)

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2 \sin \frac{a}{2}} \quad (2)$$

Esta ultima equação exige

$$-1 \leq \frac{m}{2 \sin \frac{a}{2}} \leq +1$$

ou

$$\frac{m^2}{4 \sin^2 \frac{a}{2}} \leq 1$$

Isto é

$$m^2 \leq 4 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Se esta condição é preenchida, a equação (3) determina um angulo $\frac{x-y}{2}$ que se obtém por meio das taboas, ella se transforma depois em equação algébrica

$$\frac{x-y}{2} = 2\pi - a$$

Além d'isso, a equação (1) pôde escrever-se

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$$

Ajuntando, depois subtraindo 4 e 5 encontramos

$$x = \frac{a}{2} + 2\pi + x$$

$$y = \frac{a}{2} - 2\pi - x$$

fórmulas nas quaes devemos attribuir a x e y os valores que se obtêm para os arcos contrarios diante de a .

2º Resolver o systema $\begin{cases} x + y = a \\ \text{sen } x \text{ sen } y = m \end{cases}$ (1)

A equação (2) pôde escrever-se (nº 46)

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2m$$

d'onde, tendo em conta (1)

$$\cos(x - y) = 2m + \cos a$$

Esta equação exige (3)

$$-1 \leq 2m + \cos a \leq +1$$

ou, subtraindo $\cos a$ de cada membro,

$$-(1 + \cos a) \leq 2m \leq 1 - \cos a$$

isto é

$$-\cos^2 \frac{a}{2} \leq m \leq \sin^2 \frac{a}{2}$$

Se esta condição é preenchida, a equação (3) determina o arco $x - y$ e temos assim de calcular dois arcos, conhecendo a somma e a diferença d'elles.

3º Resolver o systema $\begin{cases} x + y = a \\ \frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{p}{q} \end{cases}$ (1)

A equação (2) pôde escrever-se

$$\frac{\text{sen } x - \text{sen } y}{\text{sen } x + \text{sen } y} = \frac{p - q}{p + q}$$

ou (23)

$$\frac{\text{tg } \frac{x - y}{2}}{\text{tg } \frac{x + y}{2}} = \frac{p - q}{p + q}$$

d'onde, tendo em conta (1)

$$\text{tg } \frac{x - y}{2} = \frac{p - q}{p + q} \text{tg } \frac{a}{2}$$

Com o auxilio das taboas, esta equação determina sempre um arco

$$\frac{x - y}{2} = \alpha.$$

Ella pôde ser substituida pela equação algebrica

$$x - y = 2\alpha + 2\pi$$

ou, conhecendo a somma e a diferença dos arcos que se buscam.

Observação I. — Em cada um dos systemas precedentes, poderíamos calcular os dois arcos, conhecendo as duas equações e calcular assim os dois arcos, conhecendo a somma e a diferença d'elles.

Observação II. — Se conhece a somma de dois arcos que entram symetricamente nas equações trigonometricas dadas, ha vantagem em tomar por incognita a diferença d'elles.

Observação II. — Se dessemos a diferença dos dois arcos, procederíamos do mesmo modo, tomando por incognita auxiliar a somma dos arcos procurados.

XIII. Problema. — Achar dois arcos, conhecendo a somma d'elles, assim como a somma, o producto ou o quociente de seus cosenos.

1º Seja resolver o systema $\begin{cases} x + y = a \\ \cos x + \cos y = m \end{cases}$ (1)

A equação (2) pôde escrever-se (26)

$$2 \cos \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2} = m$$

d'onde, tendo em conta (1)

$$\cos \frac{x - y}{2} = \frac{m}{2 \cos \frac{a}{2}}$$

Esta equação exige

$$-1 \leq \frac{m}{2 \cos \frac{a}{2}} \leq +1$$

isto é

$$m^2 \leq 4 \cos^2 \frac{a}{2}$$

Se esta condição for preenchida, a equação (3) permite achar por meio das taboas a diferença dos arcos x e y , que se determina facilmente depois, conhecendo a somma e a diferença d'elles.

2º Resolver o systema $\begin{cases} x + y = a \\ \cos x \cos y = m \end{cases}$ (1)

A equação (2) pôde escrever-se (nº 47)

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2m$$

d'onde, pela equação (1)

$$\cos(x - y) = 2m - \cos a$$

A condição de possibilidade

$$-1 \leq 2m - \cos a \leq +1$$

pode escrever-se $-\sin^2 \frac{a}{2} \leq m \leq \cos^2 \frac{a}{2}$

Preenchida esta supposta condição, a equação (3) mostra a diferença $x - y$, e acaba-se como precedentemente.

3º Resolver o systema $\begin{cases} x + y = a \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{p}{q} \end{cases}$ (1)

A equação (2) pode escrever-se

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{p - q}{p + q}$$

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{p - q}{p + q}$$

d'onde, attendendo-se a (1)

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{q-p}{q+p} \cot \frac{a}{2}$$

Esta equação determina $x-y$, e acaba-se facilmente.

XIV. Problema. — *Achar dois arcs, conhecendo a somma e a differença, o producto ou o quociente de suas tangentes.*

$$\begin{cases} 1^{\circ} \text{ Resolver o systema } \begin{cases} x+y=a \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m \end{cases} \end{cases}$$

A equação (2) pode escrever-se (28)

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} = m$$

d'onde, tendo em conta (1)

assum se é levado a uma das questões precedentes.

$$\begin{cases} 2^{\circ} \text{ Resolver o systema } \begin{cases} x+y=a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m \end{cases} \end{cases}$$

A equação (2) pode escrever-se

$$\frac{\cos x \cos y}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = \frac{1-m}{1+m}$$

relação entre as duas quantidades

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$$

que permite obter cada uma d'ellas em função da outra.

Nos dois casos, podemos tomar por incógnitas $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{tg} y$ e, conhecendo a somma e o producto d'essas incógnitas auxiliares, construir a equação do segundo grão que

$$\begin{cases} 3^{\circ} \text{ Resolver o systema. } \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = p \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = q \end{cases} \quad (1)$$

A equação (2) pôde escrever-se

$$\text{ou (n.º 48)} \quad \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)} = \frac{p+q}{p-q}$$

d'onde, pela equação (1)

$$\operatorname{sen}(x-y) = \frac{p-q}{p+q} \operatorname{sen} a \quad (3)$$

$$\text{se tivermos} \quad \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2 \operatorname{sen}^2 a \leq 1$$

a equação (3) mostra a differença das incógnitas, e só resta resolver um systema d'equações algebricas.

Exercícios

1.º Resolver a equação

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 3$$

1.º Método. Substituamos todas as linhas em função de $\operatorname{sen} x$ ou de $\cos x$ em função de $\operatorname{sen} x$. De transpuzermos todos os membros e os reduzirmos ao mesmo denominador,

que se pode escrever

2.º Método. Se a equação

3.º Método. Se a equação

4.º Método. Se a equação

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 3$$

ou $\lg x = \pm 1$

d'onde $x = k\pi \pm 45^\circ$

2.º Resolver a equação

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x \cos x - 4 \cos^2 x = 1$$

Substituamos os senos e cosenos em função de $\lg x$.
A equação fica sendo :

$$\frac{2 \lg^2 x}{1 + \lg^2 x} + \frac{4 \lg x}{1 + \lg^2 x} - \frac{4}{1 + \lg^2 x} = 1$$

ou $\lg^2 x + 4 \lg x - 5 = 0$

D'ella se tira :

$\lg x = 1$ d'onde $x = k\pi + 45^\circ$

e $\lg x = -5$ d'onde $x = k\pi - 78^\circ 41' 24''$

3.º Resolver a equação $\cos^2 \frac{x-a}{2} + \cos^2 \frac{x+a}{2} = 1$

Tendo em conta a fórmula

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \quad \text{d'onde} \quad \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

A equação fica sendo :

$$\cos(x-a) + \cos(x+a) = 0$$

ou (26) $2 \cos x \cos a = 0$

D'ella se tira :

$$\cos x = 0 \quad \text{d'onde} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

4.º Resolver a equação $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos x$ (Lyão, 1893).

Esta equação póde escrever-se

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos x$$

Utilizando a fórmula que os arcos $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ e x têm o mesmo coseno; p'or

segundo o n.º 22 $x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$

1.º $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = (4k+1) \frac{\pi}{2}$

2.º $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} = (4k-1) \frac{\pi}{2}$

5.º Resolver a equação

$$4 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} \cos x - 1 = 0$$

e discutil-a considerando n'ella m como um parametro variavel. Par-se-hão calculaveis por logarithmos os valores encontrados para $\cos x$ assestando :

$$\frac{2}{m} = \lg \varphi$$

Para qualquer valor de m , a equação não é aceitavel se os signaes contrarios, tal a uma das raizes, não é aceitavel se não achar-se comprehendida entre -1 e $+1$.

A raiz negativa convém se -1 é exterior ás raizes, isto é se houver :

$$f(-1) = 3 + 2m > 0 \quad \text{ou} \quad m > -\frac{3}{2}$$

A raiz positiva convém se $+1$ é exterior ás raizes, isto é se houver :

$$f(+1) = 3 - 2m > 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{3}{2}$$

Por conseguinte ha duas raizes aceitaveis, ou sómente uma, segundo que m é interior ou exterior ao intervallo de $-\frac{3}{2}$ a $+\frac{3}{2}$.

Para tornar logarithmicas as raizes suppostas aceitaveis, escrevem-se debaixo da fórma :

$$\cos x = \frac{m}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}}\right)$$

Se puzermos $\frac{2}{m} = \lg \varphi$, estas expressões tornam-se :

$$\cos x = \frac{m}{4} (1 \pm \sqrt{1 + \lg^2 \varphi}) = \frac{m}{4} (1 \pm \sec \varphi) = \frac{m (\cos \varphi \pm 1)}{4 \cos \varphi}$$

ou, separando os dois valores ;

$$\cos x = \frac{m \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{-m \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi}$$

6.º Resolver a equação $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

Esta equação é da forma

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

mas como os coefficients a e b são iguaes, póde-se fazer seu primeiro membro logarithmico sem introduzir angulo auxiliar.

A equação póde escrever-se :

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$$

ou $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

ou $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

d'ella se tira : $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$ d'onde $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

7.º Resolver a equação $\cotg x - \lg x = 2$
Esta equação é da forma

$$a \lg x + b \cotg x = c$$

mas, os dois primeiros coefficients tendo o mesmo valor absoluto, ha vantagem em abandonar o methodo geral.

A equação pôde escrever-se successivamente :

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = 2$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 1$$

$$\lg 2x = 1$$

$$2x = k\pi + 45^\circ$$

$$x = (4k + 1) \frac{\pi}{8}$$

ou

D'ella se tira :

d'onde

8.º Resolver a equação

$$\arcsen x = \arccos \sqrt{\frac{3x}{2}}$$

Esta equação exprime que um certo arco tem por seno o numero x e por coseno o numero $\sqrt{\frac{3x}{2}}$. Em virtude da primeira relação fundamental,

equivale a dizer que a somma dos quadrados d'esses dois numeros é igual á unidade.

A equação proposta pôde pois ser substituida pela equação algébrica

$$x^2 + \frac{3x}{2} = 1$$

que fica satisfeita para $x = -2$ e para $x = \frac{1}{2}$.

Mas, para que uma raiz seja acceitavel, é preciso ter

$$x^2 \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{3x}{2} \leq 1$$

isto é

$$-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

O valor $x = \frac{1}{2}$ é pois o unico acceitavel.

9.º Resolver o systema de equações

$$\lg x + \lg y = 2$$

$$2 \cos x \cos y = 1$$

A primeira equação pôde escrever-se (28) :

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 2$$

ou, por causa da segunda, $\sin(x+y) = 1$

$$\text{D'ella se tira :} \quad x+y = (4k+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{e por conseguinte} \quad \cos y = \sin x$$

A segunda equação fica sendo :

$$\sin 2x = 1$$

$$\text{Do que conclue-se :} \quad 2x = (4k+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Logo enfim} \quad x=y = (4k+1) \frac{\pi}{4}$$

10.º Resolver o systema

$$\sin x + \sin y = a$$

$$\cos 2y - \cos 2x$$

A segunda equação pôde escrever-se (27) :

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{b}{2a}$$

Dividindo-a membro a membro pela primeira, obtem-se :

$$\sin x - \sin y = \frac{b}{2a}$$

Conhecendo a somma e a differença dos dois senos, podemos escrever :

$$\sin x = \frac{a}{2} + \frac{b}{4a} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{a}{2} - \frac{b}{4a}$$

Variações de grandeza de algumas funcções trigonometricas.

1.º Variações da funcção

$$y = a \sin x + b \cos x$$

Se fizermos

$$\frac{b}{a} = \tan \varphi$$

(1)

a funcção pôde escrever-se no §. IV :

$$y = \frac{r}{\cos \varphi} \sin(x + \varphi)$$

A equação (1) determina, entre os valores de x , os valores de x para os quaes y tem os seus extremos. Estes valores de x são os que satisfazem a equação $\cos(x + \varphi) = 0$, cujo coseno é do mesmo sign.

Teremos

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

por conseguinte, $y = + \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$

O estudo das variações da função y fica assim reduzido ao das variações de uma simples linha trigonométrica. Se fizermos crescer x de 0° a 2π , o arco $x + \varphi$ cresce de φ a $2\pi + \varphi$, e não ha dificuldade concluir as variações de y . Limitemos-nos a notar que $\sin(x + \varphi)$ e por conseguinte a função y , passa por um maximo quando x é igual a $\frac{\pi}{2} - \varphi$ e por um minimo quando x é igual a $\frac{3\pi}{2} - \varphi$.

12º Variações da função

$$y = a \operatorname{tg} x + b \cotg x$$

a e b sendo dois numeros positivos dados e x um arco variavel crescente de 0° a $\frac{\pi}{2}$.

Se o arco pertence ao primeiro quadrante, a função

$$y = a \operatorname{tg} x + \frac{b}{\operatorname{tg} x}$$

é a somma de duas variaveis positivas cujo producto é constante.

O que se reduz portanto a uma questão conhecida de algebra.

A função é minima quando temos

$$a \operatorname{tg} x = \frac{b}{\operatorname{tg} x} \quad \text{d'onde} \quad \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

O arco x crescendo de 0° a $\frac{\pi}{2}$, a função y diminue primeiramente de $+\infty$ até o seu minimo $2\sqrt{ab}$, depois cresce desde esse minimo até $+\infty$.

Observação. — O arco x crescendo de $\frac{\pi}{2}$ a π , a função y cresce de $+\infty$ até o seu minimo $2\sqrt{ab}$, depois cresce desde esse minimo até $+\infty$.

Em consequencia, a função y varia como no 1º; no 2º quadrante, a função y varia como no 1º; no 3º quadrante, a função y varia como no 1º; no 4º quadrante, a função y varia como no 1º.

Não obstante, a função varia como no 1º; no 2º quadrante, a função y varia como no 1º; no 3º quadrante, a função y varia como no 1º; no 4º quadrante, a função y varia como no 1º.

SEGUNDA PARTE

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS

CAPITULO V

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS NOS CASOS ELEMENTARES.

Resolver um triangulo, e calcular seus elementos incognitos por meio dos elementos dados.

É este o objecto principal da Trigonometria.

Um triangulo encerra seis elementos principaes, tres lados e tres angulos. Os angulos designam-se ordinariamente pelas letras A, B, C, e os lados oppostos pelas minusculas correspondentes a, b, c . Se o triangulo é rectangulo, A designa o angulo recto e a a hypotenusa.

Um triangulo é determinado quando se conhece tres de seus elementos, e queques pelo menos um lado. Este processo é chamado resolução do triangulo, e se aprende em geometria; o que permite depois medir os elementos incognitos. Este processo, porém, é falto de exactidão, por causa das construções graphicas não offerecem uma precisão sufficiente e por causa tambem da imperfeição dos instrumentos que servem para medir.

Por meio das funções circulares, substituem-se as operações graphicas por calculos, que dão os valores das incognitas com a maior approximação que é possível attingir.

§ I. — Triangulos rectangulos.

Relações entre os elementos principaes de um triangulo rectangulo

62. Theorema 1. — No triangulo recto, o seno do angulo recto é igual a hypotenusa multipliada pelo seno do angulo opposto ao lado que se procura pelo e $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$, e $\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$ a esse mesmo lado.

Seja o triangulo rectangulo ABC. Se do ponto B como centro, com BC como raio, descrevermos um arco de circulo, teremos por definição no 7º:

$$\operatorname{sen} B = \frac{AC}{BC} = \frac{t}{a}; \quad \text{d'onde} \quad t = a \operatorname{sen} B$$

complementares, $\text{sen } B = \cos C$, logo $b = a$

Do mesmo modo: $c = a \text{ sen } C$ e $c = a \cos B$

Observação. — Este theorema dá para os lados do angulo recto sendo a a hypotenusa, tem-se immediatamente
 $c = a \cos B$ e $b = a \cos C$ (30)
 $c = a \text{ sen } C$ e $b = a \text{ sen } B$

63. Theorema II. — No triangulo rectangulo cada lado do angulo recto é igual ao outro lado multiplicado pela tangente do angulo adjacente ao lado que se pede.

Com effeito, se do ponto B como centro, com BA como raio, descrevermos um arco de circulo, teremos por definição (nº 7):

$$\text{tg } B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \text{ d'onde } b = c \text{ tg } B$$

Os angulos B e C sendo complementares,

$$\text{tg } B = \cotg C; \text{ logo } b = c \cotg C$$

Do mesmo modo: $c = b \text{ tg } C$ e $c = b \cotg B$ (31)

Observações. I. — Este theorema pôde ser deduzido do precedente;

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } B}{\cos B} = \text{tg } B.$$

Resolução dos triangulos rectangulos.

O angulo C é o complemento do angulo B, logo

$$C = 90^\circ - B$$

O 1º theorema (nº 62) dá para os lados do angulo recto:

$$b = a \text{ sen } B \text{ e } c = a \cos B$$

A superficie é $S = \frac{1}{2} bc$; ou substituindo os valores de b e de c :

$$S = \frac{1}{2} a^2 \text{ sen } B \cos B = \frac{1}{4} a^2 \text{ sen } 2B$$

66. 2º Caso. — Dá-se o angulo recto b com um dos angulos agudos, B, por exemplo; calcular o outro angulo agudo C, a hypotenusa a e o outro lado c .

O angulo C é o complemento do angulo B, logo

$$C = 90^\circ - B$$

O 1º theorema dá $b = a \text{ sen } B$, logo

$$a = \frac{b}{\text{sen } B}$$

O 2º theorema dá $c = b \cotg B$.

A superficie é $S = \frac{1}{2} bc$, ou substituindo o valor de c

$$S = \frac{1}{2} b^2 \cotg B$$

67. 3º Caso. — Dá-se a hypotenusa a e um lado b do angulo recto; calcular os angulos B e C e o outro lado c .

$$\text{sen } B = \cos C = \frac{b}{a}$$

Para que esta formula seja substituída debaixo do radical $a^2 - b^2$

$$+b^2 - b^2 = 0$$

Observação. — No calculo logarítmico, o calculo logarítmico

de 1, o angulo B pouco

Esta fórmula offerece outra vantagem, a de só precisar-se da procura dos senos de $a + b$ e de $a - b$, os mesmos que servem para

$$C = 90^\circ \rightarrow B = 90^\circ - 42^\circ 48' = 47^\circ 12'$$

$$\text{Log } a = \text{log } b - \text{Log } \text{sen } E.$$

$$\text{Log } c = \text{log } b + \text{Log } \text{cot } E.$$

63. 4.º Caso. — Dão-se os dois lados do angulo recto b e c ; calcular os angulos B e C e a hypotenusa a .

Os angulos agudos são dados pela fórmula (nº 63) :

$$\text{tg } B = \text{cotg } C = \frac{b}{c}$$

Poder-se-hia em seguida calcular a hypotenusa por meio da relação $a^2 = b^2 + c^2$; mas é preferivel empregar a fórmula logarithmica $a = \frac{b}{\text{sen } B}$

porque o angulo B sendo conhecido por sua tangente, pôde-se ter facilmente $\text{sen } B$.

Poder-se-hia entretanto fazer logarithmica a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ pelo processo indicado no nº 50; chegaríamos á formula $a = \frac{b}{\cos \varphi}$. Mas o angulo φ é justamente o angulo B , de modo que este segundo meio leva ao

$$\text{A superficie é } S = \frac{1}{2} bc.$$

Exemplos numericos para indicar a disposicão dos calculos

Nos exemplos seguintes, dois casos referem-se ao mesmo triangulo e servem de verificação. O calculo é feito com taboas de 5 decimais

1.º Caso

$$A = 90^\circ$$

$$b = 125$$

$$c = 100$$

$$C = 47^\circ 12'$$

$$B = 42^\circ 48'$$

$$\text{Log } a = \text{log } b - \text{Log } \text{sen } B$$

$$\text{Log } c = \text{log } b + \text{Log } \text{cot } B$$

$$\text{Log } a = 1,09691$$

$$\text{Log } c = 1,04139$$

$$a = 125,0$$

$$c = 100,0$$

$$B = 42^\circ 48'$$

$$C = 47^\circ 12'$$

2.º Caso

$$A = 90^\circ$$

$$b = 125$$

$$c = 100$$

$$C = 47^\circ 12'$$

$$B = 42^\circ 48'$$

3.º Caso.

$$A = 90^\circ$$

$$a = 397,70$$

$$b = 388,2$$

$$\text{Fórmulas } \left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ \text{Log } c = \frac{1}{2} [\text{log } a^2 - \text{log } b^2] \\ \text{Log } c = \frac{1}{2} [\text{log } a^2 - \text{log } b^2] \end{array} \right.$$

4.º Caso.

$$C = 12^\circ 40' 30'', B = 77^\circ 19' 10''$$

Fórmulas

$$\text{Log } B = \dots$$

$$\text{Log } C = \dots$$

$$\text{Log } a = \dots$$

$$\text{Log } b = \dots$$

$$\text{Log } c = \dots$$

$$\text{Log } a = \dots$$

$$\text{Log } b = \dots$$

$$\text{Log } c = \dots$$

$$\text{Log } a = \dots$$

$$\text{Log } b = \dots$$

$$\text{Log } c = \dots$$

§ II. — Triangulos quaesquer.

Relações entre os elementos principaes de um triangulo qualquer.

69. Theorema I. — Num triangulo, os lados são

proportionaes aos senos dos angulos oppostos.

Seja o triangulo ABC. Trazemos do vertice C uma perpendicular sobre o lado opposto; essa perpendicular pôde cair em AB (fig. 17) ou em um de seus prolongamentos (fig. 18). No 1º caso, os triangulos rectangulos CAD e CBD dão:

$$CD = b \sin A \quad \text{e} \quad CD = a \sin B$$

Logo se deduz:

$$b \sin A = a \sin B; \quad \text{d'onde} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

No 2º caso, nota-se que os angulos supplementares em A têm o mesmo seno (nº 12). Logo

$$CD = b \sin A \quad \text{e} \quad CD = a \sin B$$

portanto

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Dois lados quaesquer sendo proporcionaes aos senos dos angulos oppostos, temos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (32)$$

70. Theorema II. Num triangulo, a soma dos angulos é igual a duas rectas.

Seja o triangulo ABC. Trazemos do vertice C uma perpendicular sobre o lado opposto; essa perpendicular pôde cair em AB (fig. 17) ou em um de seus prolongamentos (fig. 18). No 1º caso, os triangulos rectangulos CAD e CBD dão:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$$

No 2º caso, nota-se que os angulos supplementares em A têm o mesmo seno (nº 12). Logo

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$$

portanto

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Logo a soma dos angulos é igual a duas rectas.

Seja o triangulo ABC. Trazemos do vertice C uma perpendicular sobre o lado opposto; essa perpendicular pôde cair em AB (fig. 17) ou em um de seus prolongamentos (fig. 18). No 1º caso, os triangulos rectangulos CAD e CBD dão:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$$

CAPITULO V. — RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS

Seja o triangulo ABC. Trazemos do vertice C uma perpendicular sobre o lado opposto; essa perpendicular pôde cair em AB (fig. 17) ou em um de seus prolongamentos (fig. 18). No 1º caso, os triangulos rectangulos CAD e CBD dão:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (33)$$

Iste theorema dá as tres relações entre os seis elementos de um triangulo:

71. Theorema III. Cada lado de um triangulo é igual á somma algebraica das projecções dos outros dois sobre a direcção do primeiro.

$$\text{proj. BC} = \text{proj. BA} + \text{proj. AC}$$

Isto é, tomando a recta BC como eixo de projecção

$$\left. \begin{aligned} \text{Do mesmo modo:} \quad b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Observação I. Juntando á relação dos senos (32) a relação que existe entre os tres angulos de um triangulo, temos

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin C}{\sin A} \quad (35)$$

Observação II. Entre os seis elementos de um triangulo, não pôde haver mais de tres relações distintas.

Supozemos que se conheçam dois elementos para poder deduzir d'elles os tres restantes; mas isso não pôde ser; porque, para determinar um triangulo, precisamos que sejam precisos tres elementos. Se os tres elementos conhecidos são tres angulos, a resolução é indeterminada; se os tres elementos conhecidos são tres lados, a resolução é unica; se os tres elementos conhecidos são dois lados e um angulo, a resolução é unica; se os tres elementos conhecidos são dois angulos e um lado, a resolução é unica; se os tres elementos conhecidos são um lado e dois angulos, a resolução é unica; se os tres elementos conhecidos são um angulo e dois lados, a resolução é unica.

72. Equivalencia dos tres sistemas

1º sistema: A, B, C

2º sistema: A, B, a

3º sistema: A, B, b

4º sistema: A, B, c

5º sistema: $A, B, \angle C$

6º sistema: $A, B, \angle A$

7º sistema: $A, B, \angle B$

100

a terceira, por exemplo. Com effeito, addicionando as duas primeiras relações dadas, vem

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c(b \cos A + a \cos B),$$

$$2c^2 = 2c(b \cos A + a \cos B)$$

d'onde

e dividindo tudo por $2c$, que se supõe differente de zero

$$c = a \cos B + b \cos A$$

2.º O systema (Y) tem por consequencia o systema (X). Sendo dado o systema (Y), d'elle pôde-se deduzir cada uma das relações do systema (X), a primeira, por exemplo. Com effeito, multipliquemos respectivamente as relações dadas por a, b, c ; em seguida, da primeira, diminuamos membro a membro a somma das outras duas, e temos

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

isto é

II. Os systemas (Z) e (Y) são equivalentes.

1.º O systema (Z) tem por consequencia o systema (Y). Sendo dado o systema (Z), pôde-se deduzir cada uma das relações do systema (Y), a primeira, por exemplo. Para esse fim basta eliminar A entre as relações do systema (Z). Com effeito, a terceira pôde escrever-se $A = 180^\circ - B - C$

Do que se conclue

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

Essa relação sendo homogenea em relação aos tres senos, n'ella pôde-se dividir por $\sin B \cos C + \sin C \cos B$, que lhes são communs, e sem virtude das duas primeiras igualdades do systema (Z).

Resulta

$$a = b \cos C + c \cos B$$

2.º O systema (Y) tem por consequencia o systema (Z). Sendo dado o systema (Y), d'elle pôde-se deduzir o systema (Z).

Para obter a primeira relação dos senos, basta eliminar C entre as duas primeiras relações (Y). Reduzindo cos C ao mesmo coefficiente, e subtraindo a primeira da segunda, obtemos

$$a \cos B - b \cos A = c \cos A - c \cos B$$

ou, levando em conta a primeira relação,

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A) \cos B - (b \cos A + a \cos B) \cos A = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A$$

d'onde

$$a \sin B = b \sin A$$

Como $a, b, c, \sin A, \sin B$ são positivos por hypothese,

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

Logo

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Logo o systema (Y) sendo homogenea em relação aos tres senos, pôde-se dividir por $\sin A \sin B \sin C$, e a primeira escrever-se

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Os angulos A e $B + C$ tendo o mesmo seno, têm por differença $n\pi$ 20

$$A = B + C$$

ou por somma

$$A + B + C = (2k + 1)\pi$$

Porém cada um dos angulos A, B, C achando-se comprehendido entre 0° e 180° , deve-se fazer $k = 0$; o que dá

$$A - B - C = 0^\circ$$

ou

$$A + B + C = 180^\circ$$

A primeira hypothese não é admissivel, porque A designa um qual-quer dos angulos do triangulo.

Logo as relações (Y) têm como consequencia as tres relações do systema (Z).

Observação. Cada qual dos systemas equivalentes (X), (Y), (Z) é sufficiente para resolver qualquer triangulo; mas não apresentam a mesma vantagem. Assim é que as fórmulas (X) e as fórmulas (Y) não são logarithmicas; cada uma das equações do systema (Y) contém cinco elementos do triangulo, o que dá lugar a eliminações mais complicadas, etc.

Em geral, é pois o systema (Z) que deve ser preferido.

73. Theorema reciproco. Se tres comprimentos positivos a, b, c , e tres angulos A, B, C comprehendidos entre 0° e 180° verificam um dos tres systemas (X), (Y), (Z), existe um triangulo tendo por lados a, b, c e por angulos oppostos A, B, C .

Os tres systemas sendo equivalentes, desde que as seis grandezas consideradas satisfazem ao systema (Z) ou ao systema (Y), ellas satisfazem ao systema (X). Basta estabelecer, n'esta ultima hypothese, as seguintes proposições seguintes:

1.º Se a, b, c forem tres comprimentos que tem por lados a, b, c .

Com effeito, cos A será superior a -1 , temos:

$$b^2 - a^2 < 2bc \cos A < b^2 + c^2 + 2bc$$

isto é

$$a^2 < (b + c)^2$$

ou

$$(b + c)^2 > a^2$$

ou

$$b + c > a$$

e, suppondo o factor $b + c$ positivo,

$$a < b + c$$

d'o que resulta

$$a < b + c$$

A = se tambem:

$$a < b + c$$

Como cada um dos senos $\sin A, \sin B, \sin C$ é superior a -1 , os tres senos $\sin A, \sin B, \sin C$ são positivos, e a primeira relação do systema (Z) pôde escrever-se

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

a somma dos tres senos $\sin A, \sin B, \sin C$ é superior a 0 , e a primeira relação do systema (Z) pôde escrever-se

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$\cos A' = \cos A$$
$$A' = A$$

Do mesmo modo $B' = B$ e $C' = C$

Logo existe um triangulo qua tem por elementos as seis grandezas consideradas.

observação. Se os dados de um triângulo estão representados por letras, devemos sempre supôr que os lados dados sã... e que os ângulos dados estão compreendidos entre 0° e 180° .

Sejam α, β e γ as matrizes de \mathcal{A} e \mathcal{B} e seja \mathcal{C} a matriz de \mathcal{C} . Então, \mathcal{A} e \mathcal{B} são semelhantes se e somente se α e β são semelhantes e γ e δ são semelhantes. Além disso, \mathcal{A} e \mathcal{B} são semelhantes se e somente se α e β são semelhantes e γ e δ são semelhantes.

Para esse fim, em virtude do theorema reciproco que precede, basta recorrer as condições precisas para que os valores dos lados incognitos sejam determinados. Os seis modos de determinar os elementos de um triângulo são os seguintes: os tres lados a, b, c dados entre 0° e 180° ; visto que desde que tres comprimentos a, b, c e tres angulos A, B, C verificam um dos systemas e satisfazem a essas condições, pôde-se affirmar que são os seis elementos de um triângulo.

El primer caso representa cuatro casos elemen-

1. The first is the *Journal of the American Medical Association*, which is published weekly and contains a large amount of original research and clinical observations.

74.1.1.10. BeCl_2 (BeCl₂) BeCl_2 , calcular o ângulo

Les trois premières

$$B - C = 180^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Chrysomelidae

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad \text{e} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Se esta condição está preenchida, o problema admite uma única solução.

Superfície. A superfície do triângulo é igual à metade do produto da base a pela altura AD (fig. 51).

Temos

$$S = \frac{a}{2} \times AD$$

Mas o triangulo rectangulo ABD dá $AD = c \cdot \text{sen } B$; d'onde, substituindo c pelo valor que acabamos de estabelecer

$$AD = \frac{a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$



Fig. 15

A superfície tem pois por expressão

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

ou, notando que $\text{sen } A = \text{sen } (B + C)$, (nº 12)

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } (B + C)} \quad (33)$$

75. 2º Caso. Conhecendo dois lados a e b e o angulo comprehendido C , calcular os angulos A e B e o lado c .

As incógnitas são determinadas pelas três equações

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Calculam-se primeiro os angulos A e B, conhecendo a somma d'elles

$$A + B = 180^\circ - C$$

e a relação de seus senhores

2011

Para esse fim, procura-se a diferença $\Delta = F_{\text{calculada}} - F_{\text{tabelada}}$.

A segunda e mais importante das razões

$$\frac{\sin A}{\sin A + \sin B} = \frac{a}{a+b}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0}$$

ou (23)

12

donde, levando em conta a propriedade $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$, temos:

18. $\frac{A}{2} = \frac{B}{2}$ 19. $\frac{A}{2} = \frac{B}{2}$

$$18 \quad \frac{A - B}{2} = \frac{A - B}{2}$$

deduz-se A e B por uma addição e uma subtracção. Com conhecidos os angulos, obtem-se o lado c pela relação dos senos:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \quad (2)$$

sempre supôr que a designa o maior dos lados dados $a \geq b$; então a fórmula (36) dá para $\frac{A+B}{2}$ só um valor mais pequeno que 90°. A fórmula (2) dá para c um valor positivo. Logo o problema admite sempre uma solução, e sómente uma.

76. Superfície. Theorema. A superfície de um triangulo é igual á metade do producto de dois lados pelo seno do angulo que elles comprehendem.

Com effeito, sejam S a superfície e AD a altura a contar do vertice A (fig. 52).

$$\text{Temos} \quad S = \frac{a}{2} \times AD$$

Ora o triangulo rectangulo ADC dá

$$AD = b \sin C$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \quad (37)$$

77. Observação. A fórmula (37) requer a procura de outros tres loga-

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B} \quad (38)$$

78. Calculo directo do lado c. Se A e B são dados, pôde-se calcular directame-

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

que basta tornar logarithmica. Para esse fim multiplica-se $a^2 + b^2$ por $\cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1$, e substitue-se $\cos C$ por

$$\cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}$$

o que permite escrever-se:

ou emfim

de $\lg \frac{1}{2} A - B$

logo este segundo processo conduz á mesma solução, e ha vantagem em começar por não se precisa senão do lado c.

79. 3.º Caso. Dados os tres lados a, b, c, calcular os tres angulos A, B, C.

Calculam os angulos C determinando a das equações (X) (n.º 70).

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Mas esta fórmula não é exacta, e p.º se substitue a das equações (X) (n.º 70).

$$2 \cos \frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

ou

$$2 \sin \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

a. quæ substitue-se cos A pelo valor precedente. A primeira dá :

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 - 2bc + c^2 + a^2}{2bc}$$

ou $2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

d'onde $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b+c+a}{4bc} \cdot \frac{b+c-a}{4bc}}$

Designemos por 2p o perimetro do triangulo, teremos .

$$a+b+c=2p,$$

$$b+c-a=2(p-a)$$

$$a+c-b=2(p-b)$$

$$a+b-c=2(p-c)$$

e por conseguinte : $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

Temos tambem : $\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ (39)

$$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

A segunda relação dá semelhantemente :

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc}$$

ou $2 \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$

d'onde $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}$

Logo, substitua-se no coseno de B o valor de cos A, e no seno de B o valor de sin A, e assim para C, e teremos as fórmulas (40) :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc} \cdot \frac{4bc}{(a+b-c)(a+c-b)}$$

Das fórmulas (40) e das fórmulas (39), obtemos :

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \sin A &= \frac{a}{2bc} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \sin B &= \frac{b}{2ac} \sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \sin C &= \frac{c}{2ab} \sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \end{aligned} \quad (41)$$

As fórmulas (41) devem ser tomadas positivas

mente, porque a metade de um angulo de um triangulo é

Para determinar, podemos-nos servir indistinctamente das fórmulas (39), (40) ou (41); mas se tivermos de calcular os tres angulos, é melhor empregar as fórmulas (41), que só requerem quatro logarithmos em logar de seis ou sete e que dão resultados mais exactos (nº 60, Observ. I).

80. Superficie. A superficie de um triangulo estando expressa por $\frac{1}{2} bc \sin A$, substitua-se sen A par $2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, teremos :

$$S = bc \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$$

Ora vimos (nº 79) que :

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \bullet \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

por conseguinte :

$$S = bc \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{(bc)^2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (42)$$

81. Discussão. Procuremos as condições de possibilidade, isto é as relações que devem existir entre os dados a, b, c, para que d'ellas possamos deduzir os angulos A, B, C.

Esta discussão póde recahir indifferenteemente em um ou outro dos tres grupos de fórmulas que precedem.

Fórmulas (1). Para que exista um angulo $\frac{A}{2}$, comprehendido entre 0º e 90º, satisfazendo á formula

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

é necessario e sufficiente que se tenha

$$0 < \frac{p(p-a)}{bc} < 1$$

A primeira desigualdade podesmos escrever successivamente

$$p(p-a) > 0$$

ou

$$p > a$$

isto é

$$b+c-a > 0$$

e contin

$$a+b-c > 0$$

A segunda desigualdade podesmos escrever successivamente

$$\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4bc} < 1$$

$$(b+c-a)^2 < 4bc$$

ou

$$(b-c)^2 < a^2$$

isto é

$$(b-c) < a < (b+c)$$

1. *Chrysomelidae* (Coleoptera)

...e suficiente que cada lado seja inferior a
...conforme com os dados da geometria
...conduziam evidentemente a esta

ANULAS (2). Para que exista um angulo $\frac{1}{2}$ dado pela formula

$$\text{sem } \Lambda_a = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

é preciso e suficiente que tenhamos

$$0 < \frac{(p-b)(p-c)}{bc} < 1$$

A primeira desigualdade se reduz a

$$(p-b)(p-c) > 0$$

ou, multiplicando cada factor por 2

$$(a + c - b)(a + b - c) > 0$$

esta condição exige que os dois factores sejam de mesmo signal : do signal da sua somma $2a$, isto é positivos. É preciso pois que tenhamos ao mesmo tempo

$$\begin{aligned} a+c-b > 0 & \text{ d'onde } b < a+c \\ a+b-c > 0 & \text{ d'onde } c < a+b \end{aligned}$$

A segunda desigualdade pôde escrever-se successivamente

$$\begin{aligned} & (p-b)(p-c) < bc \\ & p^2 - p(b+c) < 0 \\ & p-b-c < 0 \end{aligned}$$

6. $\{a, b\}$ and $\{c, d\}$ are members for 2

$$a < b + c$$

Formulas and Formulae

$$t_2 = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{r + b + p + a}{p(p + a)}}$$

é preciso e suficiente que tenhamos

$$\frac{p - 1}{p - 2} \rightarrow 0$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) > 0$$

Esta condição exige que o número dos factores negativos seja

Mas esta ultima hypothese e a unica que pode ser negativa ao mesmo tempo para os tres casos de que se trata.

$p - b > 0$	$a < b + c$
$p - c > 0$	$b < a + c$
	$c < a + b$

42 Simplificação das fórmulas — pela introdução do raio do circ. do inscripto. — Sendo que a superfície de um triângulo é igual ao producto do semi-perimetro pelo raio do circulo inscripto. (Geometria.)

Tempos $S = pr$
 Por outro lado, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 Por conseguinte, $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

As formulas (3) podem pois escrever-se :

Estas últimas fórmulas são de uso muito commo-
do para os calculos logaríthmicos; porque, depois de ter achado $\log r$, ter-se-hia o loga-
ritmo de cada uma das tangentes pela addição de dois logaríthmos
sempre.

83 4.º caso. Conhecendo os lados a, b , e o ângulo A d'elles, calcular os ângulos B, C e o lado c .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{and} \quad A + B + C = 180^\circ$$

da sempre ossessivamente

2011 B - 1 - A

417

C 1895 A + b

e emfim

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \quad (3)$$

Quanto á superficie, pôde obter-se como no segundo caso pela fórmula

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

81. **Discussão.** A fórmula (1), cujo segundo membro é positivo

exige

$$\frac{b \sin A}{a} < 1$$

ou

$$a \geq b \sin A$$

Se $a < b \sin A$, o problema não tem solução.

Se $a = b \sin A$, as fórmulas (1), (2), (3) dão successivamente

$$B = 90^\circ, \quad C = 90^\circ - A \quad \text{e} \quad c = b \cos A$$

Esta solução só é aceitavel se o angulo A é agudo. Nesta hypothese, existe somente um triangulo que responde á questão. Este triangulo é rectangulo em B.

Se $a > b \sin A$, a fórmula (1) dá para o angulo B dois valores supplementares comprehendidos entre 0° e 180° : um angulo agudo B' e um angulo obtuso B'' .

Mas estes angulos só são aceitaveis se os valores correspondentes do angulo C e do lado c são ambos positivos.

Ora, se substituirmos B pelo valor B' , depois pelo valor B'' , as fórmulas (2) e (3) dão successivamente:

$$C' = 180^\circ - (A + B') \quad \text{e} \quad c' = \frac{a \sin C'}{\sin A}$$

$$\text{depois} \quad C'' = 180^\circ - (A + B'') \quad \text{e} \quad c'' = \frac{a \sin C''}{\sin A}$$

Como $A + B' < 180^\circ$, porque esta condição tem por consequencia

$$\sin C' > 0 \quad \text{e} \quad c' > 0$$

Assim tambem a segunda solução convém se tivermos

$$A + B'' < 180^\circ$$

Isto é, os angulos A e $180^\circ - B''$ sendo obtuso,

sen A > sen ($180^\circ - B''$) ou sen A > sen B''

$$\text{ou ainda} \quad \sin A > \frac{b \sin A}{a}$$

$$\text{ou emfim} \quad a > b$$

Assim, quando o angulo A é obtuso, o problema só pôde ter uma unica solução, e essa solução não existe senão no caso em que o lado opposto a A superior ao lado adjacente dado.

O quadro seguinte resume esta argumentação, cujos resultados são todos conformes aos que se encontram em geometria. (Geom.)

$a < b \sin A$	0 solução
$a = b \sin A \left\{ \begin{array}{l} A < 90^\circ \\ A \geq 90^\circ \end{array} \right.$	1 solução 0 solução
$a > b \sin A \left\{ \begin{array}{l} A < 90^\circ \\ A > 90^\circ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a < b \\ a \geq b \end{array} \right.$	2 soluções 1 solução
$a > b \sin A \left\{ \begin{array}{l} A < 90^\circ \\ A > 90^\circ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ a > b \end{array} \right.$	0 solução 1 solução

Este caso de resolução dos triangulos é denominado *caso duvidoso*, porque elle pode ter 0, 1 ou 2 soluções.

83. **Calculo directo do lado c.** — Conhecendo a , b e A , pôde-se obter c por meio da fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

que não contém nenhuma outra incognita.

Esta equação, do segundo gráo com relação a c, pôde se pôr na forma

$$c^2 - 2b \cos A \cdot c + b^2 - a^2 = 0$$

Para que uma raiz d'esta equação seja aceitavel, é preciso e sufficiente que ella seja real e positiva.

Ha tres casos a distinguir conforme o signal do producto das raizes:
1º $a > b$. As raizes são reais e de signaes contrarias; só convém a raiz positiva. Ha sempre uma solução, e uma somente.

Assim, quando o angulo A é agudo, o problema tem duas soluções ou somente uma solução, conforme o lado opposto a A é inferior ou superior ao lado adjacente.

2º **Caso.** $A > 90^\circ$. Então o angulo obtuso B'' nunca convém, visto que a somma $A + B$ excede 180° .

O angulo agudo B' só convém quando ha

$$A + B' < 180^\circ \quad \text{ou} \quad A < 180^\circ - B'$$

isto é, os angulos A e $180^\circ - B'$ sendo obtuso,

$$\sin A > \sin (180^\circ - B'') \quad \text{ou} \quad \sin A > \sin B''$$

ou ainda

$$\sin A > \frac{b \sin A}{a}$$

ou emfim

$$a > b$$

Assim, quando o angulo A é obtuso, o problema só pôde ter uma unica solução, e essa solução não existe senão no caso em que o lado opposto a A superior ao lado adjacente dado.

O quadro seguinte resume esta argumentação, cujos resultados são todos conformes aos que se encontram em geometria. (Geom.)

2º $a = b$. Uma das raizes é nulla; a outra, igual a $2b \cos A$, só convém sendo o angulo A agudo.

3º $a < b$. O producto das raizes sendo positivo, nada se pôde concluir relativamente á natureza d'essas raizes.
A condição de realidade

$$b^2 \cos^2 A - b^2 + a^2 \geq 0$$

pode escrever-se

$$a \geq b \sin A$$

Se $a < b \sin A$, o triangulo é impossivel.

Se $a = b \sin A$, a raiz dupla, $b \cos A$, só convém sendo o angulo A agudo.

Se $a > b \sin A$, as raizes são do mesmo signal, do signal da somma $2b \cos A$.

Se $A < 90^\circ$, as raizes são positivas e convém uma e outra.

Se $A > 90^\circ$, as raizes são negativas e ambas para rejeitar.

Todos estes resultados são conformes aos da discussão precedente.

86. Observação. — Resolvendo a equação que acaba de ser discutida, obtem-se:

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

Se quizermos applicar estas fórmulas, resta-nos fazel-as logarithmicas.

Para esse fim, pondo a^2 em factor commum debaixo de radical, escrevem-se:

$$c = b \cos A \pm a \sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}}$$

Admittindo que as raizes sejam reaes, isto é que tenhamos

$$a^2 \geq b^2 \sin^2 A \quad \text{d'onde} \quad \frac{b \sin A}{a} \leq 1$$

$$\frac{b \sin A}{a} = \sin \varphi \quad \text{d'onde} \quad \varphi = \arcsin \frac{b \sin A}{a}$$

Assim, temos

$$c = \frac{b \cos A}{\sin A} \pm a \cos \varphi$$

$$c \sin A = b \cos A \pm a \sin A \cos \varphi$$

$$\frac{c}{\sin A} = \frac{b}{\sin A} \cos A \pm a \cos \varphi$$

Para obter cada um directamente c , por meio das fórmulas, é necessário o angulo auxiliar φ não é outra coisa senão o angulo que se calcula, e tambem nos auxilia

Exercícios numericos para indicar a disposição dos calculos.

1º Caso.

$$\text{Dados } \begin{cases} B = 20^\circ \\ C = 42^\circ 27' 40'' \end{cases}$$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 101^\circ 47'$$

$$\text{Fórmulas } \begin{cases} b = \frac{a \sin B}{\sin A} & \text{Log } b = \log a + \log \sin B + \text{colog } \sin A \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} & \text{Log } c = \log a + \log \sin C + \text{colog } \sin A \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} \log a & = & 3,6594553 \\ \log \sin B & = & 1,7666376 \\ \text{colog } \sin A & = & 0,0092498 \\ \hline & & 3,4353427 \\ & & b = 2723^m,094 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \log a & = & 3,6594553 \\ \log \sin C & = & 1,8293645 \\ \text{colog } \sin A & = & 0,0092498 \\ \hline & & 3,4980696 \\ & & c = 3146^m,06 \end{array}$$

$$\text{Calculo da superficie: } S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Log } S & = & 2 \log a + \log \sin B + \log \sin C + \text{colog } \sin A + \text{colog } 2 \\ & & 2 \log a = 7,3189106 \\ & & \log \sin B = 1,7666376 \\ & & \log \sin C = 1,8293645 \\ & & \text{colog } \sin A = 0,0092498 \\ & & \text{colog } 2 = 1,6989700 \end{array}$$

$$S = 4431^m,00 \quad \text{ou} \quad 449 \text{ hectares } 32 \text{ ares } 30 \text{ decas}$$

2º Caso

$$\text{Dados } \begin{cases} a = 248^m,1 \\ b = 1894^m,24 \\ C = 42^\circ 27' 40'' \end{cases}$$

$$\text{Calculos auxiliares } \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{248,1}{1894,24} = 0,13097 \\ \frac{1}{b} = \frac{1}{1894,24} = 0,0005279 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \log \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (\log \frac{a}{b} + \log \frac{1}{b}) = \frac{1}{2} (\log a - \log b - \log b) \\ \log \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (\log a - 2 \log b) = \frac{1}{2} (\log a - \log b^2) \\ \log \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (\log a - \log b^2) = \frac{1}{2} (\log a - \log b^2) \end{array}$$

$$\log \cotg \frac{1}{2} C = 0,4920113$$

$$1,6206874 \quad \frac{1}{2} (A - B) = 22^{\circ} 39' 43''$$

$$\frac{1}{2} (A + B) = 72^{\circ} 8' 46'',79$$

$$A = 94^{\circ} 47' 89'',79; \quad B = 49^{\circ} 29' 3'',79$$

Calculo de c

$$\log (a + b) = 4,6412336$$

$$\log \sin \frac{1}{2} C = 1,4865538$$

$$\operatorname{colog} \cos \frac{1}{2} (A - B) = 0,0348966$$

$$4,1627460$$

Calculo de $S = \frac{1}{2} ab \sin C$

$$\log a = 4,3950705$$

$$\log b = 4,2775459$$

$$\log \sin C = 1,7661489$$

$$\operatorname{colog} 2 = 1,6989700$$

$$8,1377353$$

$$S = 1,4377353$$

Calculo de A.

$$2,9916034$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 1,4958017$$

$$\frac{1}{2} A = 47^{\circ} 23' 23'',23$$

$$A = 94^{\circ} 46' 46'',58$$

Calculo de B.

$$\log (p - a) = 2,4220400$$

$$\log (p - b) = 2,1714666$$

$$\operatorname{colog} p = 3,3010738$$

$$\operatorname{colog} (p - b) = 2,0585755$$

$$4,9528354$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = 1,9764177$$

$$\frac{1}{2} B = 43^{\circ} 26' 42'',63$$

Calculo de C.

$$\log r = 4,9178422$$

$$\log (p - c) = 3,8288544$$

$$\operatorname{colog} p = 3,3010738$$

$$\operatorname{colog} (p - c) = 2,1714666$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = 1,4958017$$

$$\frac{1}{2} C = 47^{\circ} 23' 23'',23$$

$$C = 94^{\circ} 46' 46'',58$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 1,4958017$$

$$\frac{1}{2} A = 47^{\circ} 23' 23'',23$$

$$A = 94^{\circ} 46' 46'',58$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = 1,9764177$$

$$\frac{1}{2} B = 43^{\circ} 26' 42'',63$$

$$B = 86^{\circ} 53' 25'',26$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = 1,4958017$$

$$\frac{1}{2} C = 47^{\circ} 23' 23'',23$$

$$C = 94^{\circ} 46' 46'',58$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 1,4958017$$

$$\frac{1}{2} A = 47^{\circ} 23' 23'',23$$

$$A = 94^{\circ} 46' 46'',58$$

Calculo de A.

$$\operatorname{colog} p = 3,3010738$$

Calculo de B.

$$\log r = 4,9178422$$

$$\operatorname{colog} (p - b) = 2,0585755$$

$$4,9764177$$

$$\frac{1}{2} B = 43^{\circ} 26' 42'',63$$

$$B = 86^{\circ} 53' 25'',26$$

Calculo de C.

$$\log r = 4,9178422$$

$$\operatorname{colog} (p - c) = 3,8288544$$

$$4,7466966$$

$$C = 58^{\circ} 19' 45'',10$$

1º caso. $\left\{ \begin{array}{l} a = 963^m \\ b = 1230^m,7 \\ A = 12^\circ 13' 20'' \end{array} \right. \quad (A < 90^\circ, a < b; 2 \text{ soluções.})$

Formulas $\left\{ \begin{array}{l} \sin B = \frac{b \sin A}{a}, \text{ Log } \sin B = \log b + \log \sin A + \text{colog } a \\ C = 180^\circ - (A + B) \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \text{ Log } c = \log a + \log \sin C + \text{colog } \sin A \end{array} \right.$

$$\log b = 3,0971531$$

$$\log \sin A = 1,3237288$$

$$\text{colog } a = 3,0231917$$

$$\hline 1,4460736$$

$$B' = 16^\circ 13' 6'',7, \quad B'' = 163^\circ 46' 53''$$

$$C = 151^\circ 33' 33'',3, \quad C' =$$

1ª Solução

$$\log a = 2,9768083 \quad 2,9768083$$

$$\log \sin C = 1,6778347 \text{ ou } 2,8431839$$

$$\text{colog } \sin A = 0,6742712 \quad 0,6742712$$

$$\hline 3,3289142 \text{ ou } 2,4942634$$

$$c = 2132^m,621 \text{ ou } 312^m,0782$$

$$\text{Calculo da superficie } S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\text{Log } S = \frac{1}{2} (\log a + \log b + \log \sin C) + \text{colog } 2$$

$$\frac{1}{2} (\log a + \log b) = 2,9768083 \quad 2,9768083$$

$$\frac{1}{2} \log \sin C = 0,71101 \quad 3,0971531$$

$$\hline 3,7849614 \text{ ou } 2,8431839$$

$$\text{colog } 2 = 1,6989700 \quad 1,6989700$$

$$\hline 5,4839314 \text{ ou } 4,5421539$$

$$S = 28,2 \text{ ou } 11,315,71$$

Exercícios

1º Exercício. Dadas as equações de dois lados consecutivos a, b, e o ângulo A, determinar o terceiro lado c.

2º Exercício. Dadas as equações de dois lados consecutivos a, b, e o ângulo B, determinar o terceiro lado c.

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, basta eliminar os dois lados a, b, e c, para obter a equação de A e B.

Obtem-se a equação homogenea em relação a $\sin A$ e $\cos A$

$$a \sin A \cos C + a \cos A \sin C = b \sin A$$

ou $a \operatorname{tg} A \cos C + a \sin C = b \operatorname{tg} A$

d'onde decorre: $\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$

Para calcular o angulo A por meio d'esta fórmula será preciso fazer o segundo membro logarithmico.

2º Resolver um triangulo sabendo que os tres lados são da forma

$$x, x+1, x+2$$

e que o angulo menor e o maior são da forma

$$X, 2X$$

O angulo maior estando opposto ao lado maior se fizermos

$$a=x, b=x+1, c=x+2$$

teremos $A=X$ e $C=2X$

A relação

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

fica sendo

$$\frac{x}{\sin X} = \frac{x+2}{\sin 2X}$$

e da

$$\cos X = \frac{x+2}{2x}$$

(1)

A relação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

por ser, ao contrario:

$$x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1)(x+2) \cos X$$

ou

$$x^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - 2(x^2 + 3x + 2) \cos X$$

d'onde

$$2x + 5 = 2(x^2 + 3x + 2) \cos X$$

Por conseguinte

$$\cos X = \frac{2x + 5}{2(x^2 + 3x + 2)}$$

A fórmula (1) da equação

$$\cos X = \frac{x+2}{2x}$$

e pode-se calcular $A=X$, $C=2X$ e $b=x+1$

3º Exercício. Dadas as equações de dois lados consecutivos a, b, e o ângulo A, determinar o terceiro lado c.

$$\cos x = \frac{a}{c}, \quad \cos y = \frac{b}{c}, \quad \cos z = \frac{c}{a}$$

Verificando as relações

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \operatorname{tg} \frac{1}{2} y = \operatorname{tg} \frac{1}{2} z$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \operatorname{tg} \frac{1}{2} y = \operatorname{tg} \frac{1}{2} z$$

Podemos escrever

$$\lg \frac{x}{2} \lg \frac{y}{2} \lg \frac{z}{2} = \lg \frac{p-a}{2} \lg \frac{p-b}{2} \lg \frac{p-c}{2}$$

Logo

$$\lg \frac{x}{2} \lg \frac{y}{2} \lg \frac{z}{2} = \lg \frac{p-a}{2} \lg \frac{p-b}{2} \lg \frac{p-c}{2}$$

$$\lg \frac{x}{2} \lg \frac{y}{2} \lg \frac{z}{2} = \lg \frac{p-a}{2} \lg \frac{p-b}{2} \lg \frac{p-c}{2}$$

$$\lg \frac{x}{2} \lg \frac{y}{2} \lg \frac{z}{2} = \lg \frac{p-a}{2} \lg \frac{p-b}{2} \lg \frac{p-c}{2}$$

Ora, multiplicando membro a membro as fórmulas (11) obtem-se

$$\lg \frac{x}{2} \lg \frac{y}{2} \lg \frac{z}{2} = \lg \frac{p-a}{2} \lg \frac{p-b}{2} \lg \frac{p-c}{2}$$

Logo

$$\lg \frac{x}{2} \lg \frac{y}{2} \lg \frac{z}{2} = \lg \frac{A}{2} \lg \frac{B}{2} \lg \frac{C}{2}$$

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES AO LEVANTAMENTO DE PLANTAS.

87. Problema I. Determinar a distancia de um ponto acessivel A a um ponto inacessivel C.

Escolhe-se arbitrariamente e mede-se no terreno uma base de operação AB; depois, por meio de um graphometro (*) medem-se os angulos A e B do triangulo ABC, isto é, os angulos formados com a base AB pelos raios visuaes AC, BC, dirigidos para o ponto C.

Então calcular AC no triangulo ABC, conhecendo o lado AB e os dois angulos adjacentes (nº 74).

O angulo C sendo igual a $180^\circ - (A + B)$, a relação dos senos

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$AC = AB \frac{\sin B}{\sin C}$$

Observação. Se a

Se a base AB for medida em metros, a distancia AC será também em metros.

88. Problema II.

Medir a distancia AC, quando se conhece o lado AB e os angulos A e B.

Resolução. Pelo problema I, a distancia AC será dada por

$AC = AB \frac{\sin B}{\sin C}$

onde C é o angulo oposto ao lado AB, e portanto

$C = 180^\circ - (A + B)$

Logo a distancia AC será dada por

123. Se as distancias AC e AD nos triangulos ABC e ABD, e a mesma, e o angulo $\angle C$ e maior do que o angulo $\angle D$, prova-se que o angulo $\angle B$ e maior do que o angulo $\angle A$.

Se os quatro pontos A, B, C, D, se acham no mesmo plano, o angulo CAD é a differença de dois angulos conhecidos DAB e CAB. No caso contrario, que é o mais geral, mede-se directamente este angulo CAD. Então pôde-se calcular a distancia

Seja a medir a altura AB .

Seja a medir a altura AB .

Mede-se no terreno uma base horizontal AD, que não seja muito differente da altura que se procura; em seguida, por meio

de um graphometro collocado no ponto D, mede-se o angulo ECD formado pela horizontal tirada pelo centro do graphometro no plano CAB, com o raio visual CB dirigido para o vertice do edificio".

Temos

$$BE = EC \text{ 1g } ECB$$

Para ter a altura total, basta juntar a este resultado a altura do graphometro DC ou AE.

Obtem-se

$$AB = AE + EC \text{ (g ECB)}$$

90. Problema IV. Determinar a altura de um edifício cujo pé

a 3rd of 100 L.V.

consiste em determinar a distância do vértice M a cada

ponto acessível D, a medido atugal MBM formado pelo raio visual BM com a horizontal que encontra a vertical LM e a resolver depois o triângulo rectângulo MBP.

Suponhamos que se possa tomar sobre o solo uma base AB , que seja horizontal e situada em um plano passando pela altura EM .



CAPITULO VI. — APPLICAÇÕES AO LEVANTAMENTO DE PLANTAS. 1-7

Então pode-se calcular a distância DM, no triângulo CDM, do qual se conhece os ângulos e o lado DC; depois a altura FM, no triângulo MDF, do qual se conhece a hipotenusa DM e o ângulo agudo L. A altura total é a soma EF + FM.

2ª Se é impossível ter-se uma base horizontal passando pelo pé da altura o_1 encontrando essa altura, procede-se como na questão seguinte.

94. Problema V. *Determinar a altura de uma montanha.*

Seja medir a altura MN , do vértice M acima do plano horizontal:
essa por um ponto conhe-

O método consiste em determinar a distância AM no 1° e medir o ângulo MAN e a resolver o triângulo retângulo MAN .

Toma-se uma base arbitraria AB, que se mede, assim como os angulos formados com esta base pelos raios visuaes AM, BM, dirigidos para o vertice. Mede-se tambem o angulo MAE formado pelo raio AM com a vertical AE; este angulo, igual a NMA é o complemento de MAN.

Então póde-se calcular a distancia AM , no triangulo ABM , do qual se conhece os angulos e um lado; depois a altura MN , no triangulo AMN , do qual se conhece a hypotenusa e um angulo agudo.

92. Problema do mappa. Tres pontos A, B, C, situados em um plano horizontal, sendo reproduzidos no mappa de um paiz, determinar a posição de um quarto ponto do mesmo plano, de onde as distancias CA, CB foram vistas de baixo de

A solução geométrica é muito simples: basta desenharmos sobre AC e sobre BC, como cordas, segmentos capazes de sustentar os ângulos α e β . Os arcos desenhados são de raios comuns: o ponto C e um ponto M, este último respondendo à questão.

So $\angle AOB = 2 \times \angle AOB = 180^\circ$

o quadrilátero ACBM é inscrito em uma das duas circunferências auxiliares se confundem, e a posição do ponto M sobre esta circunferência única é indeterminada.

Solução trigonométrica (1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

1111 1 1111 1

A somma dos angulos de um quadrilatero sendo igual a quatro
 das temos $x + y = 360^\circ - (C + \alpha + \beta)$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{e} \quad \frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

estas duas equações, multiplicando a primeira pelo membro, obtem-se

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} \quad (2)$$

Assim a equação resolve-se em calcular x e y e depois substituir na equação (1) para obter a solução.

A equação (2) pôde escrever-se successivamente

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \frac{1 - \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}{1 + \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}$$

Se puzermos $\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \operatorname{tg} \varphi$ (3)

a equação precedente torna-se

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \quad (4)$$

Com estas equações e as formulas 3, (4) permitem achar x e y e depois substituir na equação (1) para obter a solução.

Observação. No caso especial

$$\alpha + \beta = C + 180^\circ$$

$$x + y = 180^\circ \quad \text{d'onde} \quad \sin x = \sin y$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \varphi = 1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 1 \quad \text{d'onde} \quad \varphi = 45^\circ$$

(1)

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} 0^\circ \cdot \operatorname{tg} 90^\circ = 0 \times \infty$$

Symbolo de maior
 geometricamente.

94. Problema VII. Determinar o raio de uma torre
 circular inacessivel.

Seja O o centro da torre e A, B pontos de observação
 visual ACM tangente a essa secção.

O triangulo rectangulo OAC da

$$OC = R = OA \sin OAC \quad (1)$$

Tudo reduz-se a determinar o angulo OAC e a
 distancia OA .

Mede-se uma base horizontal AB e os angulos

$$BAM = \alpha, \quad BAP = \alpha', \quad ABM = \beta, \quad ABP = \beta'$$

formados por esta base com os raios visuaes tangentes á torre.

As rectas AO, BO sendo as bissectrizes dos angulos PAM e PBM

temos

$$BAO = \frac{\alpha + \alpha'}{2} \quad \text{e} \quad ABO = \frac{\beta + \beta'}{2}$$

O triangulo AOB tem-se assim
 os angulos e um lado.

$$OA = AB \frac{\sin B}{\sin A}$$

A expressao (1) torna-se

$$R = AB \frac{\sin B}{\sin A}$$

isto é

$$R = AB \frac{\sin \frac{\beta + \beta'}{2}}{\sin \frac{\alpha + \alpha'}{2}}$$

95. Problema VIII. Determinar o raio de uma
 torre circular inacessivel.

Seja O o centro da torre e A, B pontos de observação
 visual ACM tangente a essa secção.

Seja G o centro da torre e B, C pontos de observação
 visual ACM tangente a essa secção.

Ao ponto A de observação visual ACM tangente a essa secção.

Ao ponto B de observação visual ACM tangente a essa secção.

Fig. 59.

e A o ponto de

Os ângulos BCA e LBA ou α são iguais como tendo seus lados perpendiculares.

O triângulo rectângulo BAC dá

$$AC = BC \cos \alpha$$

$$R = (R + h) \cos \alpha$$

de onde

$$R = \frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

e tornando logaritmico o denominador

$$R = \frac{h \cos \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

CAPITULO VII

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS FORA DOS CASOS ELEMENTARES

§ I. — Cálculo dos elementos secundarios de um triângulo em função dos elementos primarios

96. Raio R do circulo circumscripto. Theorema. — Em todo triângulo, o diametro do circulo circumscripto é igual a razão dos senos.

O triângulo rectângulo BAC dá

$$BC = 2R \operatorname{sen} A'$$

Mas o ângulo A' é igual ao ângulo A.

Assim,

$$a = 2R \operatorname{sen} A$$

Logo

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

Logo, para qualquer triângulo, a razão dos senos dos ângulos e dos lados oppositos a estes ângulos é constante.

É uma segunda demonstração da relação dos senos (nº 69):

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \quad 43$$

Observação. — Para os triângulos rectângulos, a relação dos senos e dos lados oppositos a estes senos é constante.

que dá

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

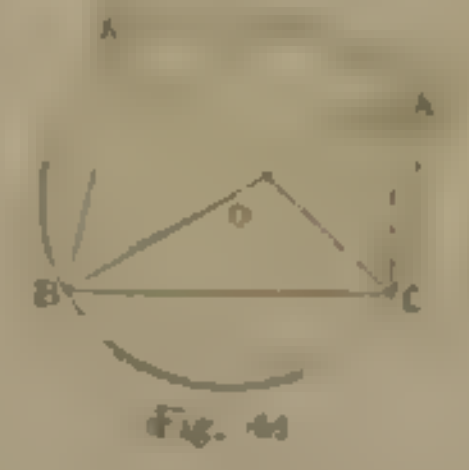
e, por consequente

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \quad 44$$

97. Raios r , r_a , r_b , r_c dos circulos inscriptos e ex-inscriptos

Sejam D, E, F os pontos de contacto do circulo inscripto O, com os lados AB, BC, CA. Os triângulos OAD, OBE, OFC são rectângulos.

$$r = OD = \frac{AD}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{b}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{c}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}$$



donde

$$x' = \frac{2bc}{b+c} \sin \frac{A}{2} \quad (32)$$

e substituindo $\sin \frac{A}{2}$ em função dos tres lados

$$x' = \frac{2}{b+c} \sqrt{(p-b)(p-c)bc}$$

§ II. Expressão dos diversos elementos de um triângulo em função dos ângulos e do raio do círculo circumscripto

103. Lados. As relações (13) dão imediatamente

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin A \\ b &= 2R \sin B \\ c &= 2R \sin C \end{aligned} \quad (33)$$

104. Alturas. Combinando-se estas últimas com

$$\begin{aligned} h_a &= b \sin C = 2R \sin B \sin C \\ h_b &= 2R \sin A \sin C \\ h_c &= 2R \sin A \sin B \end{aligned} \quad (34)$$

105. Superfície. As relações (33 e 34) permitem escrever

$$S = \frac{1}{2} ah_a = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (35)$$

106. Bissectrizes. Substituindo cada lado por seu valor (33) nas fórmulas (31) tem-se

$$a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{2R^2 \sin B \sin C \cos \frac{A}{2}}{2R (\sin B + \sin C)}$$

Mas,

$$\sin B + \sin C = \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

Logo

$$\begin{aligned} a &= 2R \frac{\sin B \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}} \\ b &= 2R \frac{\sin C \sin A}{\cos \frac{C-A}{2}} \\ c &= 2R \frac{\sin A \sin B}{\cos \frac{A-B}{2}} \end{aligned} \quad (36)$$

CAPITULO VII. — RESOLUÇÃO DOS TRIÂNGULOS.

As bissectrizes interiores exprimem-se de modo análogo

$$x = \frac{\sin B \sin C}{\sin \frac{A}{2}}$$

107. Semi-perimetro e diferenças $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Vista das fórmulas (33), temos

$$p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Assim também:

$$2(p-a) = b+c-a = 2R (\sin B + \sin C - \sin A)$$

logo

$$p-a = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$p-b = 4R \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$p-c = 4R \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

108. Raios dos círculos inscriptos e ex-inscriptos.

Se levarmos em conta as quatro fórmulas que precedem, as relações (43) e (46) ficam sendo

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2R^2 \sin A \sin B \sin C}{4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

ou

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{2R^2 \sin A \sin B \sin C}{4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

donde

$$r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$r_b = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$r_c = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

§ III. Resolução de alguns triângulos

109. Tres methodos para a resolução de um triângulo

Quando os dados de um triângulo comprehendem tres elementos secundarios, exprimem-se em primeiro lugar estes elementos em função dos elementos principaes, e depois resolve-se as equações obtidas em relação a um dos elementos secundarios.

As mais das vezes só se obtem com facilidade uma parte dos angulos ou dos lados procurados; mas pôde-se considerar o triangulo

Na procura dos elementos principaes, pôde-se seguir tres marchas distintas:

1º Solução TRIGONOMETRICA: Começa-se por calcular

2º Solução ALGEBRICA: Calculam-se primeiramente os lados. Este processo exige sómente calculos e discussões puramente algebricas e

3º Solução GEOMETRICA: Começa-se por construir o triangulo geometricamente, depois deduzem-se os calculos d'esta construção.

Se compararmos os resultados obtidos por estes tres methodos, é evidente que se verifica existir entre elles perfeita identidade.

Observação. As vezes, em lugar de procurar directamente os elementos principaes do triangulo, calculam-se, por meio dos dados, outros elementos secundarios cujo conhecimento reduz a questão a algum outro problema anteriormente resolvido.

110 Problema I. Resolver um triangulo, conhecendo um angulo A, e o lado oposto a e a somma $b + c = l$ dos dois outros lados.

SOLUÇÃO TRIGONOMETRICA. Faz-se apparecer a somma dada $b + c = l$, adicionando termo a termo duas rasões da relação dos senos; temos a equação

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{\sin b + c}{\sin b + \sin c} = \frac{l \sin A}{a}$$

$$B + C = 180^\circ - A$$

Logo os angulos B e C, conhecendo a somma d'elles e

seu producto, é preciso que cada um dos

angulos B e C, satisfazendo entre si a relação

obtidos se obtinhamos pelas duas equações

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ou ainda a segunda do quadrado da primeira:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$bc = \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{A}{2}}$$

A questão reduz-se a achar dois numeros, conhecendo a sua somma e o seu producto.

Conhecendo os lados e um angulo do triangulo proposto, obter-se-hão os outros dois angulos pela relação dos senos.

SOLUÇÃO GEOMETRICA. Seja ABC um triangulo que responda á questão. Se prolongar-se CA de um comprimento AM igual a AB, o triangulo BAM sendo isosceles, cada um dos angulos ABM, AMB é igual a $\frac{A}{2}$.

Pôde-se pois construir o triangulo BCM conhecendo dois lados e o angulo opposto a um d'elles (nº 84), depois deduzir d'elles o triangulo ABC levantando a perpendicular PA no meio de BM.

Isto posto, o triangulo CBM dá a relação dos senos

Fig. 64

d'onde se tira

Esta equação permite que se calcule o angulo $B + \frac{A}{2}$, e por conseguinte o angulo B.

Conhecendo a, A e B, cahimos no primeiro caso elementar.

111. Problema II. Resolver um triangulo, conhecendo dois lados b, c, e a bissectriz α do angulo comprehendido.

SOLUÇÃO TRIGONOMETRICA. A bissectriz tem por expressão

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

Esta equação dá

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{\alpha (b+c)}{2bc}$$

o que equivale a resolver um triangulo, conhecendo dois lados e o angulo comprehendido.

SOLUÇÃO ALGEBRICA. Sejam x e y os segmentos determinados pela bissectriz sobre o lado a. Temos (nº 101).

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

$$x + y = a$$

$$bc = x^2 + xy$$

A primeira equação pôde escrever-se

$$\frac{x}{b} = \frac{a-y}{c}$$

della se tira

$$a = (b+c) \sqrt{\frac{bc-x^2}{b^2}}$$

Tudo se reduz em resolver um triângulo, conhecendo os tres
Solução GEOMETRICA. Seja ABC o triângulo determinado

Tracemos a DA a paralela BM que encontra em M o prolonga-
mento de CA.

O angulo M é igual a $\frac{A}{2}$, e o segmento AM é igual a c

Os triângulos semelhantes CBM, CDA dão

$$\frac{BM}{c} = \frac{CM}{b} \quad \text{d'onde} \quad BM = \frac{c(b+c)}{b}$$

No triângulo CMB conhecem-se dois lados MC, MB e o angulo com-
preendido.

Podemos pois construir esse triângulo e d'elle deduzir o tri-
ângulo ABC levantando a perpendicular PM sobre CA.

posto, o triângulo isosceles BAM dá

$$BM = 2PM = 2c \cos \frac{A}{2}$$

III. Problema III. — Conhecendo os tres lados a, b, c, achar os tres angulos.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$$

Conhecendo os angulos B e C, recorre-se ao p.º caso elementar

Problema IV
Conhecendo os tres lados a, b, c

Conhecendo um angulo A,
e os lados b e c

$$\sin A$$

$$\frac{C-A}{2}$$

$$\frac{b}{c-a} = \frac{\sin C + \sin A}{\sin C - \sin A} = \frac{C+A}{C-A}$$

ou a fórmula

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin \frac{C+A}{2} + \sin \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C+A}{2} - \sin \frac{C-A}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}$$

d'onde enfim

Conhecendo A, C e b, recorre-se ao primeiro caso elementar.

Por outra forma. — A relação dos senos poderia ter sido escrita assim

$$\frac{b+c-a}{b-c+a} = \frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B - \sin C + \sin A}$$

Recorrendo ao terceiro caso elementar
fazemos nas relações anteriores substituindo membro a
membro as duas relações

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{b+c-a}{b-c+a} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

PROCESSO ALGEBRAICO. Obtem-se os lados c e a por meio das duas equações.

$$\begin{cases} c - a = l \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{cases}$$

A primeira pôde escrever-se

$$a = c - l$$

e a segunda torna-se em

$$(c - l)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

d'onde

$$c = \frac{b^2 - l^2}{2(b \cos A - l)}$$

e os lados a e c sejam ambos positivos, é preciso e sufficiente

114. Problema V. — Resolver um triangulo, conhecendo as tres alturas

h_a, h_b, h_c .

As relações

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c$$

podem escrever-se

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c}$$

teriam para lados as inversas das tres alturas. Os angulos do triangulo proposto são pois iguaes aos do triangulo cujos lados são $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$; podemos, pois, obtel-os por meio das fórmulas de resolução do 3º caso elementar.

Os lados são então da los pelas relações

$$2S = ab \sin C = bh_b$$

d'onde se tira

$$a = \frac{h_b}{\sin C}$$

$$b = \frac{h_c}{\sin A}$$

$$c = \frac{h_a}{\sin B}$$

115. Problema VI. — Resolver um triangulo, conhecendo os tres lados a, b, c e o circumscripto

R o raio do circulo circumscripto.

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C$$

$$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

Observação. — Este problema é muito simples a resolução de que se trata (nº 113) e por um elemento secundario

Para isso, basta calcular R em função dos angulos e do elemento secundario conhecido. Exprime-se primeiramente este em função de A, B, C e de R , o que é sempre possível (nº 103 e seguintes); depois resolve-se a relação obtida no que respeita a R , e só falta então substituir R por seu valor nas fórmulas de resolução do problema VI (nº 113).

116. Problema VII. — Resolver um triangulo, conhecendo os angulos A, B, C e a superficie S .

Siga-se a marcha que acaba de ser indicada

A fórmula (35) da

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

d'onde

$$2R = \sqrt{\frac{2S}{\sin A \sin B \sin C}}$$

As fórmulas de resolução do problema VI tornam-se

$$a = \sqrt{\frac{2S \sin A}{\sin B \sin C}}, \quad b = \sqrt{\frac{2S \sin B}{\sin A \sin C}}, \quad c = \sqrt{\frac{2S \sin C}{\sin A \sin B}}$$

Obtem-se tambem estes resultados por meio das fórmulas (35, nº 74) que exprimem a superficie em função dos angulos e de um só lado

Observação. — Proceder-se-hia da mesma maneira se, com os angulos A, B, C se dêsse a altura h_a , ou a bissectriz a , ou o perimetro $2p$, ou o raio r , etc...

Assim, as fórmulas (34), (36), (38), (60)... dão respectivamente

$$2R = \frac{h_a}{\sin A \sin B}, \quad 2R = \frac{a \cos \frac{B-C}{2}}{\sin A \sin B},$$

$$2R = \frac{2}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}, \quad 2R = \frac{2p}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

e tirasse por substituição ou outra d'essas expressões no lugar de h_a , a , $2p$, r etc. no caso simples de que se trata (nº 113).

Vê-se o quanto é util saber a har rapidamente as fórmulas dos nºs 103 e seguintes.

Exercícios.

Triangulos rectangulos.

1º Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo os tres lados a, b, c e o circumscripto R .

Solução trigonometrica. — Temos

$$m = \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \tan B$$

SOLUÇÃO ALGÉBRICA. — Os lados são determinados pelas duas equações

7 = 114

$$b^2 + c^2 = a^2$$

2. Resolver um triângulo rectângulo, conhecendo a hipotenusa a e a altura correspondente h .

SOLUÇÃO TRIGONOMETRICA. — Igualando duas expressões da superfície do triângulo, obtém-se

$$ah = bc$$

$$b = a \operatorname{sen} B \quad \text{e} \quad c = a \cos B$$

$$\log a h = a^2 \operatorname{sen} B \cos B$$

d'où $\sin 2B = \frac{2h}{a}$

Conhecemos agora a hypotenusa e um angulo agudo.

SOLUÇÃO ALGÉBRICA. — Os lados são dados pelas equações

$$bc \equiv ah$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

3º Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo a hypotenusa a e a differença $b - c = d$ dos outros dois lados.

SOLUÇÃO TRIGONOMETRICA. — Se substituirmos b e c em função dos ângulos, a equação dada passa a ser

$$d = a (\sin B - \sin C) = 2a \sin \frac{B-C}{2} \cos 45^\circ$$

$$s_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Sección transversal del Teren, a dos de los ángulos, obtenidos fácilmente en los ejes de los ejes.

Os lados são determinados pelas duas equações

h. — d

$$1^2 + 1^2 = 2^2$$

contenuto in a , la *hypotenusa* a e c o vice

Seja $\triangle ABC$ qualquer, numa figura, que temos n'um de angulo

1. 2. 3. 4. 5.

... is the only one that can be consistently combined by a hypo-

... e, portanto, a sua natureza, que estão de todo desconhecidos.

CAPITULO VII. — RESOLUÇÃO DOS TRIÂNGULOS.

143

Assim, a equação precedente pôde escrever-se :

$$a + 2r = a(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C) = 2a \operatorname{sen} 45^\circ \cos \frac{B-C}{2}$$

d'onde

3.º Resolver um triângulo isósceles, conhecendo a altura principal h e o raio r do círculo inscripto.

Seja A o angulo do vertice. A altura divide o triangulo considerado em dois triangulos rectangulos iguaes que são facis de resolver. Effectivamente, os angulos B e C são complementares de $\frac{A}{2}$, e se unirmos o centro do circulo inscripto a um de seus pontos de contacto com os lado iguaes, temos (Th. 1º):

$$r = (h - r) \sin \frac{A}{2}, \text{ d'où } \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{h - r}$$

os tres angulos estão pois determinados.

10

$$c = \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

Triangulos quaecunque.

6th R. Sch. and P. Sch. are the only ones in the A. Sch. system and are
 21 22nd b in the Sch. system.

SOLUÇÃO TRIANGULO MÉTRICA. — Calculando-se os ângulos B e C, e conhecendo-se a soma d'elles $B + C = 180^\circ - A$ e a relação de seus senos

$$\frac{\sin I}{\sin C} = \frac{t}{c} = \frac{n_2}{n_1}$$

Esta questão foi resolvida.

Solução ALGÉBRICA. — Os lados e as áreas dos polígonos são dados por

100

$$a^2 \quad \{^2 +, ^2 - 2^2 \cos \lambda$$

\mathbb{Q} não contém nenhuma outra incógnita.

Trochocera truncata, n. sp., *Trichobryon* sp.

$$a = 2R \sin A \sin C$$

$$\sin(A+C) = \sin B$$

seno e somma e o producto dos senos.

8.º Resolver um triangulo, conhecendo um lado a a somma $b+c$ e os

$$\text{A fórmula (33)} \quad r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

Conhecendo a , A e $b+c$, recaímos num problema já resolvido n.º 111.

inscripto e circumscrip.º).

$$\text{As fórmulas (33)} \quad a = 2R \sin A$$

vão respectivamente

$$\sin A = \frac{a}{2R} \quad \text{depois} \quad b+c = \frac{r}{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}} + a$$

Conhecemos então A , a , e $b+c$, o que reduz a questão a um problema resolvido n.º 111.

14.º Resolver um triangulo, conhecendo um angulo C , a superficie S e a somma:

$$a+b+c=2m$$

$$\text{Temos n.º 105)} \quad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

e n.º 107

Por conseguinte, podemos calcular os angulos $\frac{A}{2}$ e $\frac{B}{2}$, conhecendo a sua somma e o producto de suas tangentes.

11.º Resolver um triangulo, conhecendo o angulo A , e as bissectrizes interior e exterior d'esse angulo, a e a' .

As bissectrizes dadas têm por expressão n.º 101 e 102,:

$$a = \frac{bc}{b+c} \cotg \frac{A}{2}$$

$$a' = \frac{bc}{b-c} \cotg \frac{A}{2}$$

Estas duas equações permitem calcular os lados b e c , visto que ellas não contém nenhuma outra incognita.

D'ellas tambem podem-se deduzir os angulos B e C . Com effeito, se as dividirmos membro a membro, vem

$$\frac{a}{a'} = \frac{b-c}{b+c} \cotg \frac{A}{2}$$

d'onde

isto é

Mas temos

$$\text{e por conseguinte} \quad \cotg \frac{B+C}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

Supprimindo este factor common, a equação precedente se reduz a

$$\frac{B-C}{2} = \frac{a}{a'}$$

fica conhecida a somma e a differença dos angulos

12.º Dê-se um triângulo ABC, cujas bissectrizes interiores encontram o circulo circumscripto em A', B', C'; unem-se dois a dois estes pontos de encontro. Resolver o triângulo A', B', C'.

Mesma questão, os pontos A', B', C' sendo os intersecções das alturas do triângulo ABC.

1.º Os pontos B', C', sendo os meios dos arcos AC e AB, temos, quanto ao numero de grãos

$$A' = \frac{1}{2} \text{ arco}(AB' + AC') = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

Assim como $B' = 90^\circ - \frac{B}{2}$ e $C' = 90^\circ - \frac{C}{2}$

Conhecendo os angulos do triângulo A', B', C', e o raio do circulo circumscripto, resolve-se a questão.

2.º Temos, quanto ao numero de grãos,

$$A' = \frac{1}{2} \text{ arco}(AB' + AC') = \frac{ABB'}{2} + \frac{ACC'}{2} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - A \right)$$

Assim $A' = \pi - 2A$, $B' = \pi - 2B$, $C' = \pi - 2C$

e ainda fica a questão reduzida á resolução de um triângulo do qual se conhecem os angulos e o diametro do circulo circumscripto.

CAPITULO VIII

APPLICAÇÕES DIVERSAS.

§ I. — Quadrilatero inscriptivel.

117. Resolver um quadrilatero inscriptivel, conhecendo os quatro lados a, b, c, d.

Calculo dos angulos. — Seja ABCD um quadrilatero inscriptivel tendo por lados

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d$$

A diagonal BD determina dois triangulos BDA, BDC, que dão

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

Se igualarmos entre si estas duas expressões, notando que se tem $A + C = 180^\circ$ d'onde $\cos C = -\cos A$ obtemos a equação

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

d'onde se tira $\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$ (1)

Esta fórmula não é logarithmica, mas d'ella se deduz

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c-a-d)(b+c+a-d)(b+c-a+d)(b+c+d-a)}{2(ad+bc)^2}}$$

isto é

$$2 \sin \frac{A}{2} = \frac{(b+c-a-d)(b+c+a-d)(b+c-a+d)(b+c+d-a)}{2(ad+bc)^2}$$

Se assumarmos $a+b+c+d = 2p$
d'onde $a+b+c-d = 2p-2d$
 $a+b+c+d = 2p$
 $a+b+c-d = 2p-2d$ etc...

A fórmula precedente passa a ser

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-d)^2 - d^2}{ad+bc}$$

d'onde $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-d)}{ad+bc}}$



Fig. 66.

Da mesma fórmula (41), podemos tambem deduzir

$$1 + \cos A = \frac{2ad + 2b^2 + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + bc} = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)}$$

ou

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)} = \frac{4(p-b)(p-c)}{2(ad+bc)}$$

d'onde

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}} \quad (63)$$

Entim, se dividirmos membro a membro as fórmulas (62) e (63), obtemos

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}} \quad (64)$$

Um calculo todo semelhante daria as expressões analogas de $\sin \frac{B}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$ e $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$.

Conhecendo os angulos A e B, podemos d'elles deduzir os supplementos C e D.

118. Superfície do quadrilatero inscriptivel. — A área S do quadrilatero ABCD é a somma das áreas dos triângulos ABC e ADC, isto é

$$S = \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C$$

ou, substituindo $\sin C$ por seu igual $\sin A$ ou $2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

$$S = (ad + bc) \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

Em vista das fórmulas (62) e (63), esta expressão torna-se

$$S = (ad + bc) \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{ad+bc}}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (65)$$

Observação. Se o quadrilatero é ao mesmo tempo inscriptivel e circumscripivel, e ta nã na propriedade acarreta a igualdade das duas fórmulas para a área.

$$I = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} = p$$

e a expressão da superfície vem a ser

$$S = \sqrt{ad+bc}$$

119. Diagonaes do quadrilatero inscriptivel. A eliminação de $\cos A$ entre as duas relações

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

dá

$$\frac{BD^2 - a^2 - d^2}{2ad} = \frac{b^2 + c^2 - BD^2}{2bc}$$

equação d'onde se tira

$$BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \quad (66)$$

Obtem-se do mesmo modo

$$AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} \quad (67)$$

THEOREMAS DE PTOLOMEU. Em todo quadrilatero inscriptivel :

1º O producto das diagonaes é igual d somma dos productos dos lados oppositos.

2º As diagonaes são proporci nars ds sommas dos productos dos lados que concorrem com ellas.

Com effeito, se multiplicarmos as fórmulas (66) e (67) e as dividirmos depois membro a membro, obtemos respectivamente

$$AC \times BD = ac + bd$$

e

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

120. Raio do circulo circumscripto ao quadrilatero. O raio R do circulo circumscripto ao quadrilatero ABCD, e por consequente ao triangulo ABC, é representado pela fórmula

$$R = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

d'onde, substituindo $\sin \frac{A}{2}$ por seu valor em função dos lados,

$$R = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2}} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{ad+bc}}}$$

§ II. — Exercícios de Geometria plana

1º Superfície de um parallelogramo. A área S de um parallelogramo é igual a producto do lado por a altura correspondente, ou que pue el a sua reticulada.

Com effeito, o parallelogramo ABCD e dividido pela diagonal AC em dois triangulos e a sua área

Se escrevermos $AB = m$ e $AD = n$, temos por conseguinte

$$ABCD = 2. BAD = mn \operatorname{sen} A$$

2º Superfície de um quadrilátero qualquer. A superfície de um quadrilátero é igual á metade do producto de suas diagonaes multiplicado pelo seno do angulo que ellas formam.



Fig. 67.

Sejam S a superfície de um quadrilátero $ABCD$, do qual se conhecem as diagonaes $AC = m$, $BD = n$ e o angulo O que ellas formam.

A superfície S é a somma dos quatro triangulos OAB , OBC , OCD , ODA ; mas ella se obtém mais facilmente do modo seguinte.

As parallelas traçadas ás diagonaes pelos vertices oppostos formam um parallelogramma cuja superfície é dupla da superfície do quadrilátero. Ora os lados d'esse parallelogramma são iguaes ás diagonaes m , n , e um de seus angulos é igual ao angulo agudo O .

Temos pois $2S = mn \operatorname{sen} O$

d'onde $S = \frac{1}{2} mn \operatorname{sen} O$

3º Superfície de um polygono regular. Calcular a superfície de um polygono regular de n lados, em funcção: 1º do raio R do circulo circumscripto; 2º do lado c ; 3º do apothema a .

A superfície S do polygono regular $ABCD...$, de centro O , é a somma de n triangulos iguaes a OAB

$$S = n. OAB$$

O angulo central OAB , é igual a $\frac{2\pi}{n}$.

1º Temos $OAB = \frac{1}{2} OA. OB \operatorname{sen} AOB$

$$= \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

$$S = \frac{n}{2} R^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

$$OM = \frac{1}{2} OM$$

$$OM = AM = \frac{1}{2} OM = \frac{1}{2} OM \cotg \frac{\pi}{n}$$

$$AB = \frac{1}{2} AB. OM = \frac{1}{2} OM \cotg \frac{\pi}{n}$$

$$S = \frac{n}{2} OM^2 \cotg \frac{\pi}{n}$$

$$S = \frac{n}{2} OM^2 \cotg \frac{\pi}{n}$$

Logo $AOB = \frac{1}{2} AB. OM = a' \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$

e enfim $S = na^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$

4º Se por um ponto qualquer tomado no plano de um triangulo traçam-se parallelas aos tres lados, formam-se tres parallelogrammas e tres triangulos. Demonstrar que o producto das areas dos parallelogrammas é igual a 8 vezes o dos triangulos.

Seja o triangulo ABC

Chamemos α , β , γ os angulos dos triangulos DEF FGH GHI HIJ IJK JKL LMN MNO NOP POQ QOR ROS SOT TOU UOV VOX XOY YOZ ZOA OAB OBC OCD ODE OEF OFG OGH OHI OIJ OJK OLM LON LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX LOY LOZ LOA LOB LOC LOD LOE LOF LOG LOH LOI LOJ LOK LOL LOM LON LOO LOP LOQ LOS LOT LOU LOV LOW LOX <

Uma das diagonaes tem por valor a somma dos segundos membros e a outra a sua differença.

Discussão. Para que os valores de x e de y sejam reaes, é necessario que tenhamos :

$$b^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 0; \text{ d'onde } \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{b^2}{a^2},$$

ou $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq \frac{b}{a}.$

Se $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$, o segundo radical é nullo, e $x=y$;

alem d'isto $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

e $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; 2x = 2y = \sqrt{a^2 + b^2};$

o parallelogramma é um rectangulo.

Se, no valor precedente, $a=b$, temos $2x=2y=a\sqrt{2}$, o rectangulo é um quadrado.

Se fizermos ao mesmo tempo $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$ e $b=a$, $2x$ e $2y$ se apresentam debaixo da fórma indeterminada $\frac{0}{0}$. Esta indeterminação é

real, porque α é recto, e os quatro lados são iguaes; a figura é um quadrado, as diagonaes podem pois crescer sem deixarem de ser perpendiculares e sem que os

§ III. Exercícios de Geometria no espaço.

1º Achar a razão dos volumes gerados por um parallelogramma girando successivamente em torno de seus lados a e b .

Seja α o angulo dos lados do parallelogramma. Quando o eixo de rotação é o lado a , o volume gerado é

$$V_a = \pi ab^2 \sin^2 \alpha;$$

quando o eixo de rotação é o lado b , o volume formado é

$$V_b = \pi a^2 b \sin^2 \alpha;$$

Logo $\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$

Os volumes estão em razão inversa dos eixos de rotação.

2º Calcular a superficie e o volume gerados por um semi-polygono regular inscripto de um numero par de lados girando em torno do diametro do circulo circumscripto.

Seja $2n$ o numero dos lados.

1º A superficie procurada é igual á circumferencia i pela projecção do contorno sobre o eixo. Por cons

$$S = 2\pi r \cdot 2R, \text{ e como } r = R \cos \frac{\pi}{2n}, S = 4\pi R^2 \cos \frac{\pi}{2n}$$

2º O volume é igual á superficie descripta multiplicada pela terça parte do raio da circumferencia inscripta. Logo

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^2 \frac{\pi}{2n}$$

Se n tende para o infinito, $\frac{\pi}{2n}$ tende para zero e seu cos tende para a unidade, logo para o limite :

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ formulas relativas á esphera.}$$

3º Numa esphera de raio R traçar um plano secante AB tal que : 1º a superficie lateral do cone d'apex no centro e base o circulo AB seja igual ao do cone de raio R e base o circulo da esphera.

Seja α o semi-angulo do cone. 1º A superficie lateral do cone é $2\pi R^2 \sin \alpha$, a da calotte é

$$2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

donde $\sin \alpha = 2(1 - \cos \alpha)$

$$\text{ou } 1 - \cos^2 \alpha = 4(1 - \cos \alpha)^2$$

$$\text{ou } 1 + \cos \alpha = 1 - \cos \alpha + 4(1 - \cos \alpha)$$

fig. 71

Suprimindo o factor commum $1 - \cos \alpha$, correspondente á solução $\alpha = 0$, resta

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

2º O volume do cone é $\frac{1}{3} \pi R^2 \sin^2 a \cos a$

e do segmento é $\pi R^2 (1 - \cos a)^2 (2 + \cos a)$

Logo $\sin^2 a \cos a = (1 - \cos a)^2 (2 + \cos a)$

ou $(1 - \cos a) (1 + \cos a) \cos a = (1 - \cos a)^2 (2 + \cos a)$

ou $(1 + \cos a) \cos a = (1 - \cos a) (2 + \cos a)$

ou enfim $2 \cos^2 a + 2 \cos a - 2 = 0$

$$\cos a = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{5})$$

A raiz negativa devendo ser rejeitada, o valor de $\cos a$ é ig.

1º Theorema. — A área da projecção de um triângulo

o seno do ângulo que o seu plano forma com o
o de projecção.

Com effeito, supponhamos em primeiro log

parallêlo ao plano de projecção; podemos então
supôr que o plano de projecção passa por AB. Do
vertice C abaixemos sobre o plano uma perpen-



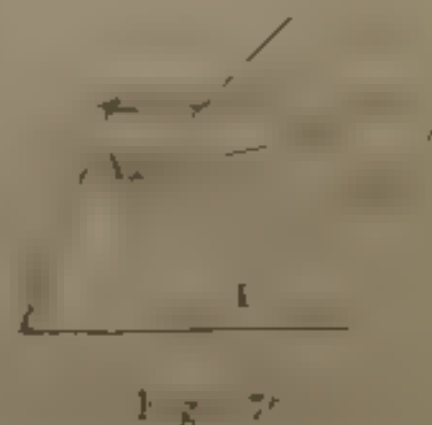
; se unirmos CD, esta recta será a altura do triângulo ABC.
e o ângulo $CDC = a$ será o ângulo dos dois planos.

Ora $cD = CD \cos a$

logo $\frac{AB \times cD}{2} = \frac{BA \times CD}{2} \cos a$

isto é $\text{superf. } ABc = \text{superf. } ABC \times \cos a$

Supponhamos em segundo lugar que o triângulo não



$$AB \times cD = AB \times CD \cos a$$

$$AB \times cD = AB \times CD \cos a$$

$$AB \times cD = AB \times CD \cos a$$

Logo para o triângulo, se estiver no

plano de projecção, se estiver no

plano de projecção, se estiver no

plano de projecção, se estiver no

plano de projecção, se estiver no

plano de projecção, se estiver no

plano de projecção, se estiver no

plano de projecção, se estiver no

5º Theorema. — A somma dos quadrados das projecções de uma área
plana sobre tres planos rectangulares é igual ao quadrado da área

Com effeito, sejam S a superficie considerada e α, β, γ os ângulos
formados por seu plano com os planos que determinam dois a dois tr
eixos rectangulares OX, OY, OZ.

A somma dos quadrados das projecções da área S sobre estes tres plano

$$S^2 \cos^2 \alpha + S^2 \cos^2 \beta + S^2 \cos^2 \gamma$$

ou $S^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$

Ora, o ângulo de dois planos sendo igual ao de duas rectas respecti-
vamente perpendiculares a esses planos, e tirarmos uma recta OD per-
pendicular ao plano da superficie S, os tres ângulos α, β, γ são respecti-
vamente iguaes aos que forma OD com os tres eixos OX, OY, OZ.

Tudo reduz-se pois a demonstrar que a somma dos quadrados dos cosenos
dos ângulos que uma recta faz com tres eixos rectangulares é igual a unidade.

Tomemos sobre essa recta um segmento qualquer $OD = d$; as pro-
jecções d'esse segmento sobre os tres

$$a = d \cos \alpha, \quad b = d \cos \beta, \quad c = d \cos \gamma$$

são as arestas de um parallelepipedo rectangulo tendo por diagonal d;

temos pois $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

isto é $d^2 \cos^2 \alpha + d^2 \cos^2 \beta + d^2 \cos^2 \gamma = d^2$

d'onde $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Logo a somma dos quadrados das projecções da área S pôde escre-
ver-se

$$S^2 \cos^2 \alpha + S^2 \cos^2 \beta + S^2 \cos^2 \gamma = S^2$$

Em particular, n'um tetraedro OABC tendo um triedro O tri-rectan-
gulo, cada uma das faces sendo a projecção da área ABC sobre seu

$$(OAB)^2 + (OBC)^2 + (OCA)^2 = (ABC)^2$$

I

THE
... ..
... ..

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Finalmente demonstraremos, com consistência, que a

Demonstração geométrica. 1º Caso $a \leq b$ e $a \leq c$. $a \leq b$ e $a \leq c$

American Express Co. New York

(0.75) it is a ...

$$\begin{aligned} \text{con } l' &= l - (Q - IL) = CH \\ \text{con } l' &= l - (Q - IL) = LQ - CL = IN \end{aligned}$$

Podemos dizer que as substâncias H_2 , CH_4 , CO_2 e HCl são triatômicas e as substâncias H_2O e H_2SO_4 são tetraatômicas, daí:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{III} = \text{EP} \times \text{CI} = \text{sen } a \text{ sen } t$$
$$\frac{IL}{EP} = \frac{OL}{OP} = \frac{OI}{OE} \text{ ou } 1$$
$$IL = LP \times Ol = \text{sen } a \cos b$$
$$OL = OP \times Ol = \cos a \cos t$$

substituindo esses valores em (1) e

Generalizando o 2.º caso: Dada um dos arcos a , b e inferior

consideremos os complementos dos arcos a e b .

$$a' = \frac{\pi}{2} - a \quad b' = \frac{\pi}{4} - b. \quad (3)$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt}$

que...

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\end{aligned}$$

são as fórmulas de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^n .
 dida sobre o \mathbb{R}^n .

3º Caso. Se as formas (x, y, z) e (x, y, z) são $\mathbb{C}[x, y, z]$ -isomorfas, então, pelo lema 1.2, se φ é um isomorfismo, então $\varphi(x) = ax + by + cz$, $\varphi(y) = dx + ey + fz$ e $\varphi(z) = gx + hy + iz$, para $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{C}$.

Com efeito, temos:

$$\cos a' \cos b' = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Substituamos a' por seu valor $a - \frac{\pi}{2}$, obt

$$\begin{aligned}\sin\left(a + b - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \cos b + \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \sin b \\ \cos\left(a + b - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \cos b - \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \sin b\end{aligned}$$

isto é, em virtude do n° 16.

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

1° Caso. As fórmulas (α), (β) são verdadeiras para dois arcos positivos quaisquer.

Sejam dois arcos positivos a e b . Dividindo cada um d'esses arcos por $\frac{\pi}{2}$, obtemos quocientes inteiros m, n e restos inferiores a $\frac{\pi}{2}$, a' e b' o que permite escrever-se

$$a = m \frac{\pi}{2} + a' \quad b = n \frac{\pi}{2} + b'$$

As fórmulas (α), (β) são applicaveis aos arcos a', b' em virtude do

$$\begin{aligned}\sin(a' + b') &= \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b' & (6) \\ \cos(a' + b') &= \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b' & (7)\end{aligned}$$

Ora, segundo o 3° caso, estas fórmulas subsistem quando se j

Se a' e b' são restos inferiores a $\frac{\pi}{2}$, e a, b são restos inferiores a $\frac{\pi}{2}$, as fórmulas (6) e (7) subsistem para a e b .

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

As fórmulas (α), (β) applicaveis a dois arcos positivos quaisquer.

2° Caso. Sejam dois arcos a e b , dos quaes um pelo menos é maior que $\frac{\pi}{2}$. Seja a o maior dos dois arcos, e seja a' o resto inferior a $\frac{\pi}{2}$ que se obtém ao dividir a por $\frac{\pi}{2}$.

$$a = k \frac{\pi}{2} + a' \quad b = l \frac{\pi}{2} + b'$$

As fórmulas (α), (β) subsistem para a' e b' em virtude do 1° caso.

$$\begin{aligned}\sin(a' + b') &= \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b' \\ \cos(a' + b') &= \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'\end{aligned}$$

Se k e l são ambos ímpares, $a + b = (k + l) \frac{\pi}{2} + a' + b'$, e as fórmulas (6) e (7) subsistem para $a + b$.

depois $2k\pi$ a cada um d'esses arcos, o que não altera nenhuma das suas linhas trigonometricas (8), e (9) tornam-se finalmente

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

são as fórmulas (α) e (β) applicadas a dois arcos quaisquer.

Logo as fórmulas são completamente geraes.

II. Sen $(a - b)$ e cos $(a - b)$ em função dos senos e cosenos dos arcos a e b .

Se substituirmos b por $-b$ nas fórmulas (α) e (β), obtemos as fórmulas igualmente geraes.

$$\begin{aligned}\sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$

III. Observação. As fórmulas (α), (β), que comprehendem as fórmulas (γ), (δ), entram ellas mesmas uma na outra.

Com effeito, se substituirmos a por $a + \frac{\pi}{2}$, a primeira fica sendo

$$\sin\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \cos b + \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \sin b$$

ou, tendo em conta o n° 16,

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Logo, na realidade, as quatro fórmulas (α), (β), (γ), (δ) reduzem-se a uma só. Bastaria estabelecer uma d'ellas em sua generalidade para poder depois deduzir as outras tres.

REPRESENTAÇÃO TRIGONOMETRICA DAS FUNCOES PERIODICAS

Se se pede a algebra que se estabeleça a representação trigonometrica das funcoes periodicas, a primeira coisa a fazer é estabelecer a representação trigonometrica da funcao seno.

Seja $f(x)$ uma funcao periodica de periodo 2π . Seja a um numero real qualquer. Seja t um numero real qualquer. Seja θ um numero real qualquer. Seja ϕ um numero real qualquer. Seja ψ um numero real qualquer. Seja χ um numero real qualquer. Seja ξ um numero real qualquer. Seja η um numero real qualquer. Seja θ um numero real qualquer. Seja ϕ um numero real qualquer. Seja ψ um numero real qualquer. Seja χ um numero real qualquer. Seja ξ um numero real qualquer. Seja η um numero real qualquer.

Portanto, podemos escrever :

$$a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm b \sqrt{-1},$$

d'onde, representando-se, com Gauss $\sqrt{-1}$ pela letra i , vem :

$$a \pm bi \quad (1)$$

como symbolo das expressões imaginárias.

Si na expressão (1) supuzermos $b=0$ ella se reduz a a ; portanto, os imaginarios comprehendem como caso particular as quantidades reaes.

As denominações real e imaginaria forão infelizes, pois suggerem uma opposição que não existe. O imaginario, no verdadeiro ponto de vista scientifico, tem o mesmo sentido que a fracção, o negativo, o irracional, e não qualquer outro sentido especial e extranho. Todas essas expressões não passam de meros symbolos, indicando resultados de operações sobre numeros inteiros positivos, quando taes resultados não são números inteiros positivos.

A razão pela qual denominou-se imaginario a expressão algebrica onde entra o symbolo i , foi a dificuldade de descobrir alguma realidade extra-algebrica que o representasse.

Pela algebra sabe-se :

1º Que dous imaginarios que differem sómente pelo signal do coe-

ficiente de i , são chamados conjugados, taes são $a+bi$ e $a-bi$.
 2º Que a soma de dois conjugados é real e igual a duas vezes a real quadrata
 3º Que o producto de dois conjugados é real e igual ao quadrado da real quadrata
 4º Que a divisão de dois conjugados é real e igual ao quadrado da real quadrata

$$3-4i + 4i = 3$$

Portanto, a soma de dois conjugados é real e igual a duas vezes a real quadrata

1º A equação $a+bi=0$ se decompõe em

$$a=0 \text{ e } b=0$$

2º A equação $a+bi=0$ se decompõe em

3º A equação $a+bi=0$ se decompõe em

$$a=a' \text{ e } b=b'$$

4º A equação $a+bi=0$ se decompõe em

$$p = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

5º A equação $a+bi=0$ se decompõe em

$$a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

6º A equação $a+bi=0$ se decompõe em

$$p = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

7º A equação $a+bi=0$ se decompõe em

obter-se o valor de ρ , elevão-se ao quadrado os membros de cada equação e depois se as sommam ordenadamente; vem :

$$\rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = a^2 + b^2$$

8. por ser

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,$$

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

d'onde :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que, considerado com o signal positivo, o que é sempre possível, é o modulo.

Para obtenção do angulo φ tirão-se do systema supra as duas relações :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\rho}$$

Essas duas relações são satisfeitas por um mesmo angulo, pois a somma dos quadrados dos segundos men.bros é igual á unidade; na verdade :

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\rho^2} = \frac{a^2 + b^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

Portanto, o angulo φ é determinado pelo seu seno e seu coseno

Exercício : Seja o imaginario

$$3+4i;$$

Tem-se

$$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

8

$$\cos \varphi = \frac{3}{5}$$

$$\sin \varphi = \frac{4}{5}$$

d'onde

$$\varphi = 36.87^\circ$$

E portanto

$$3+4i = 5(\cos 36.87^\circ + i \sin 36.87^\circ)$$

Theo em 2º. O valor do coseno e do seno de um angulo φ são dados e a somma dos seus quadrados é igual á unidade.

Sejam os dous imaginarios

$$\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\text{e } \rho' (\cos \psi + i \sin \psi);$$

multiplicando, vem:

$$\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \times \rho' (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$= \rho \rho' [\cos \varphi \cos \psi + i \sin \varphi \cos \psi + i \sin \varphi \cos \psi + i^2 \sin \varphi \sin \psi] \\ = \rho \rho' [\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi)] \\ = \rho \rho' [\cos (\varphi + \psi) + i \sin (\varphi + \psi)]$$

o que demonstra o theorema.

Corollario 1º. O modulo e o argumento do producto de um numero qualquer de imaginarios são iguaes respectivamente ao producto dos modulos e á somma dos argumentos dos factores.

Com effeito, para multiplicar os dous primeiros factores, multiplicam-se seus modulos e sommam-se seus argumentos. Para multiplicar esse producto pelo terceiro factor, deve-se multiplicar seu modulo pelo do terceiro factor, e somma-se a seu argumento o do terceiro factor; e assim por diante.

Corollario 2º. Para elevar um imaginario a uma potencia inteira e positiva de grau m , é necessario elevar o modulo á potencia m e multiplicar o argumento por m .

É uma consequencia immediata do corollario precedente, suppondo-se iguaes todos os factores alli considerados.

Formula da Moivre. Do corollario 2º deduz-se:

$$[\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^m = \rho^m (\cos m \varphi + i \sin m \varphi).$$

Fazendo $\varphi = 1$, o que equivale a suppor o modulo igual a 1, vem

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^m = \cos m \varphi + i \sin m \varphi$$

Essa igualdade notavel chama-se a formula de Moivre.

III

(1)

$$z = 1$$

que vamos resolver de modo elegante com auxilio da formula de Moivre.

Toda a expressão imaginaria cuja potencia m é 1, ou tem para modulo a unidade, tem tambem para modulo a unidade.

(1) admite uma raiz imaginaria, essa raiz é da forma

$$\cos \varphi + i \sin \varphi$$

Para que essa expressão seja effectivamente raiz, é necessario e sufficiente que se tenha, de accordo com a formula de Moivre:

$$\cos m \varphi + i \sin m \varphi = 1,$$

d'onde

$$\cos m \varphi = 1; \text{ e } \sin m \varphi = 0$$

ou

$$m \varphi = 2 k \pi \quad \text{e } \varphi = \frac{2 k \pi}{m},$$

sendo k um inteiro arbitrario.

Por consequencia a equação (1) é satisfetá por todos os valores de z comprehendidos na formula

$$(2) \quad z = \cos \frac{2 k \pi}{m} + i \sin \frac{2 k \pi}{m}.$$

Para que dous valores de k' e k'' de k correspondam a dous valores de z , é necessario e sufficiente que a differença dos argumentos $\frac{2 k' \pi}{m}, \frac{2 k'' \pi}{m}$ seja um multiplo de 2π , ou, em outros termos, que a differença $k' - k''$ seja um multiplo de m .

Quaes são obtidos, tomando-se a k , m valores inteiros consecutivos quaesquer entre $-\infty$ e $+\infty$, por exemplo:

$$0, 1, 2, \dots, (m-1).$$

Logo, a equação (1) tem m raizes

$$z = 1, \dots, z = 1$$

Attribuindo-se a k na formula (2) os valores

$$0, 1, 2, \dots, (m-1)$$

vem:

$$z = 1$$

$$z = \cos \frac{2 \pi}{3} + i \sin \frac{2 \pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = \cos \frac{4 \pi}{3} + i \sin \frac{4 \pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pode-se notar que a terceira raiz z_2 é o quadrado da segunda z_1 .

Fazendo-se então:

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

as trez raizes da equação $z^3 - 1 = 0$ serão representadas por 1, j e j^2 .

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Exercícios sobre os Capítulos I. e II

1. Reduzir ao primeiro quadrante as linhas dos arcos seguintes:

- 1° sen $105^\circ 45' 4''$
- 2° sen $124^\circ 3' 12''$
- 3° sen $223^\circ 32' 21''$
- 4° sen $1413^\circ 18' 43''$

2. Dado $\text{sen } a = \frac{4}{5}$, achar as outras linhas trigonometricas do arco a .

3. Mesma questão, sabendo que $\text{cosec } a = \sqrt{3}$.

4. Achar o seno e o coseno de um arco cuja tangente é $\frac{3}{4}$.

5. Achar as linhas trigonometricas dos arcos de 120° e de 105° .

6. Achar todos os angulos comprehendidos entre 0 e 900° para os quaes temos: $\text{tg } a = 1$.

7. Qual é o valor da expressão:

$$x = \frac{\text{sen } 60^\circ + \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 45^\circ + \text{sen } 15^\circ}$$

8. Dados $\text{sen } A = \frac{1}{2}$ e $\text{cos } A = \frac{1}{2}$, achar $\text{sen } A + \text{cos } A$.

9. Calcular $\text{tg } (1 + b)$, sabendo que $\text{tg } a = 1$ e $\text{tg } b = \frac{1}{2}$.

10. $\text{Sen } a = \frac{1}{4}$, $\text{cos } b = \frac{1}{2}$, achar $\text{sen } (a + b)$ e $\text{cos } (a + b)$.

11. Dado $\text{sen } a = \frac{4}{5}$, achar $\text{sen } 2a$, $\text{cos } 2a$ e $\text{tg } 2a$.

12. Calcular $\text{sen } 3a$ em função de $\text{sen } a$ e $\text{cos } 3a$ em função de $\text{cos } a$. Verificar para $a = 0^\circ$.

$\sqrt{3}$ calcular $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$.14. Achar $\sin 9^\circ$ e $\cos 9^\circ$.Sabendo que $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, achar $\operatorname{tg} 15^\circ$ depois $\operatorname{tg} 7^\circ 30'$.15. $\frac{24}{a}$ calcular $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ e d'ahi deduzir $\sin \frac{a}{2}$.17. $\cos a = 0,7$; calcular $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$.18. $\sin 34^\circ 24' 12'' + \sin 12^\circ 14' 28''$ 19. $\sin 25^\circ 36' 14'' + \sin 16^\circ 3' 46''$ 20. $\sin 32^\circ 8' 17'' - \sin 9^\circ 10' 25''$ 21. $\cos 43^\circ 17' 44'' + \cos 27^\circ 56' 4''$ 22. $\cos 6^\circ 12' 5'' - \cos 62^\circ 40' 32''$ 23. $\cos 20^\circ 0' 58'' - \sin 35^\circ 53' 8''$ 24. $\operatorname{tg} 18^\circ 24' 9'' + \operatorname{tg} 10^\circ 0' 42''$ 25. $\operatorname{cotg} 37^\circ 38' 49'' - \operatorname{cotg} 76^\circ 4' 59''$ 26. $\sin 63^\circ 34' 12'' + \sin 38^\circ 7' 45''$ 27. $\sin 98^\circ 6' 35'' - \sin 25^\circ 32' 8''$ 28. $\sin 98^\circ 6' 35'' - \sin 25^\circ 32' 8''$ 29. $\sin 98^\circ 6' 35'' - \sin 25^\circ 32' 8''$ 30. $\sin 98^\circ 6' 35'' - \sin 25^\circ 32' 8''$

Tornar calculareis por logarithmos as expressões.

31. $1 - \cos 64^\circ 36' 48''$	36. $1 + \operatorname{tg} 15^\circ 24' 33''$
32. $1 - \cos 64^\circ 36' 48''$	37. $1 + \operatorname{tg} 15^\circ 24' 33''$
33. $1 - \cos 64^\circ 36' 48''$	38. $1 + \operatorname{tg} 15^\circ 24' 33''$
34. $1 - \cos 64^\circ 36' 48''$	39. $1 + \operatorname{tg} 15^\circ 24' 33''$
35. $1 - \cos 64^\circ 36' 48''$	40. $1 + \operatorname{tg} 15^\circ 24' 33''$

Exercícios sobre o Capítulo III.

38. $\sin 12^\circ 14' 28''$	43. $\sin 18^\circ 26' 42''$
39. $\sin 25^\circ 36' 14''$	44. $\sin 38^\circ 7' 45''$
40. $\sin 32^\circ 8' 17''$	45. $\sin 63^\circ 34' 12''$
41. $\sin 43^\circ 17' 44''$	46. $\sin 98^\circ 6' 35''$
42. $\sin 6^\circ 12' 5''$	47. $\sin 98^\circ 6' 35''$
43. $\sin 12^\circ 14' 28''$	48. $\sin 98^\circ 6' 35''$
44. $\sin 18^\circ 26' 42''$	49. $\sin 98^\circ 6' 35''$
45. $\sin 38^\circ 7' 45''$	50. $\sin 98^\circ 6' 35''$
46. $\sin 63^\circ 34' 12''$	51. $\sin 98^\circ 6' 35''$
47. $\sin 98^\circ 6' 35''$	52. $\sin 98^\circ 6' 35''$
48. $\sin 98^\circ 6' 35''$	53. $\sin 98^\circ 6' 35''$
49. $\sin 98^\circ 6' 35''$	54. $\sin 98^\circ 6' 35''$
50. $\sin 98^\circ 6' 35''$	55. $\sin 98^\circ 6' 35''$

Achar os logarithmos de :

58. $\operatorname{tg} 40^\circ 22' 10''$	68. $\operatorname{tg} 63^\circ 33' 8'',1$
59. $\operatorname{tg} 21^\circ 45' 20''$	69. $\operatorname{tg} 87^\circ 4'$
60. $\operatorname{tg} 32^\circ 16' 35''$	70. $\operatorname{tg} 19^\circ$
61. $\operatorname{cotg} 47^\circ 39' 28''$	71. $\operatorname{tg} 2^\circ 4' 34'',7$
62. $\operatorname{tg} 43^\circ 0' 46''$	72. $\operatorname{tg} 0^\circ 15' 49'',9$
63. $\operatorname{tg} 54^\circ 27' 57''$	73. $\operatorname{cotg} 0^\circ 0' 56'',1$
64. $\operatorname{cotg} 69^\circ 0' 9''$	

Achar os logarithmos de :

78. $\sin 164^\circ 27' 30''$	80. $\sin 208^\circ 45' 23''$
79. $\cos 120^\circ 33' 10''$	81. $\cos 221^\circ 33' 59''$

Achar os angulos correspondentes a :

83. $\log \cos x = 1,8449065$	93. $\log \cos x = 1,8765432$
84. $\log \sin x = 1,7736933$	94. $\log \sin x = 1,7531866$
85. $\log \cos x = 1,7149428$	95. $\log \cos x = 1,7891231$
86. $\log \sin x = 1,6531571$	96. $\log \sin x = 1,6315789$
87. $\log \cos x = 1,5913714$	97. $\log \cos x = 1,5638285$
88. $\log \sin x = 1,5295857$	98. $\log \sin x = 1,5017428$
89. $\log \cos x = 1,9834560$	99. $\log \cos x = 2,7331789$
90. $\log \sin x = 1,9216703$	
91. $\log \cos x = 1,8601846$	
92. $\log \sin x = 1,7983989$	

Achar os angulos correspondentes a :

102. $\log \operatorname{tg} x = 1,8821231$	112. $\log \operatorname{tg} x = 0,9178768$
103. $\log \operatorname{cotg} x = 1,0178768$	113. $\log \operatorname{cotg} x = 0,0821231$
104. $\log \operatorname{tg} x = 0,0178768$	114. $\log \operatorname{tg} x = 0,9821231$
105. $\log \operatorname{cotg} x = 1,8178768$	115. $\log \operatorname{cotg} x = 1,9821231$
106. $\log \operatorname{tg} x = 1,3210789$	116. $\log \operatorname{tg} x = 0,6789210$
107. $\log \operatorname{cotg} x = 0,6789210$	117. $\log \operatorname{cotg} x = 0,3210789$
108. $\log \operatorname{tg} x = 1,0178768$	118. $\log \operatorname{tg} x = 0,9821231$
109. $\log \operatorname{cotg} x = 0,9821231$	119. $\log \operatorname{cotg} x = 0,0178768$
110. $\log \operatorname{tg} x = 1,8178768$	120. $\log \operatorname{tg} x = 1,8178768$
111. $\log \operatorname{cotg} x = 0,1821231$	121. $\log \operatorname{cotg} x = 0,1821231$

122.	$\sec x = \frac{3}{5}$	126.	$\sec x = \frac{7}{3}$
123.	$\csc x = \frac{5}{3}$	127.	$\csc x = \frac{17}{5}$
124.	$\cos x = 0,7$	128.	$\cotg x = -\frac{5}{7}$
125.	$\cotg x = \frac{2}{3}$	129.	$\csc x = -\frac{5}{3}$

Achar os menores arcos positivos que satisfaçam às equações

130. $\lg x = \sin 12^\circ 24' 48'' + \cos 12^\circ 24' 48''$

131. $\lg x = \lg 63^\circ 15' 16'' + \cotg 63^\circ 15' 16''$

Exercícios sobre o Capítulo IV.

Equações a uma incognita.

132. Achar o menor angulo positivo que satisfaça á equação : $\lg 2x = \lg x$.

133. Resolver a equação : $\lg x + \cotg x = 4$.

134. Resolver a equação : $\lg x + ab \cotg x = a + b$.

135. Resolver a equação : $\lg x - \cotg x = 1$.

136. Resolver a equação : $\sin 5x = \sin 7x$

137. Resolver a equação : $\sin 4x + \sin x = 0$.

138. Calcular o angulo x determinado pela relação seguinte :

$$\sin(x + 45^\circ), \sin(x + 75^\circ) = \sin 62^\circ.$$

139. Qual é o arco cujo coseno é igual á corda?

gonometricas seja igual á uma quantidade dada m .

140. Resolver as equações :

1º $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

2º $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.

3º $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$.

140. Resolver : $\sin(x - a) = \sin x - \sin a$

141. Resolver a equação : $\lg^2 x - \cotg^2 x = m^2 - 3m$.

142. Resolver a equação : $\arcsin x + \arcsin x \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

Equações a muitas incognitas.

143. Resolver o systema das duas equações ;

$$\sin x = \cos 2y$$

$$\sin 2x = \cos y$$

144. Achar dois angulos conhecendo a somma a de seus senos e a somma b de seus cosenos.

achar, especialmente, todos os valores de x e de y que satisfazam a essas equações quando se tem: $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{6}$.

159. Resolver as duas equações:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= \sin a \\ \cos x + \cos y &= 1 + \cos a\end{aligned}$$

160. Resolver o systema das duas equações:

$$2(\sin 2x + \sin 2y) = 1 = 2 \sin(x + y)$$

161. Eliminar x e y entre as tres equações:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= a \\ \cos x + \cos y &= b \\ \cos(x - y) &= c\end{aligned}$$

162. Eliminar x entre as equações:

$$\begin{aligned}a - b \sin(x + a) &= (a + b) \sin(x - a) \\ a \lg \frac{x}{a} - b \lg \frac{a}{b} &= c\end{aligned}$$

163. Achar todos os valores de $\sin x$ e de $\sin y$ que verificam as equações:

$$\begin{aligned}\sin y &= k \sin x \\ 2 \cos x + \cos y &= 1\end{aligned}$$

que valores deve-se dar a k para que seja possível o problema?

164. Calcular dois angulos, conhecendo a sua somma ou a sua differença d'elles, e a somma, o producto ou o quociente de seus senos.

165. Calcular dois angulos, conhecendo a sua somma e a sua differença e a somma, o producto ou o quociente de suas tangentes.

166. Dividir um angulo a em duas partes taes que o seno de uma das partes, ou a de seus cossenos, seja igual a um numero dado m .

167. Dividir um angulo a em duas partes taes que o seno de uma das partes, ou a de seus cossenos, seja igual a um numero dado m .

168. Dividir um angulo a em duas partes taes que suas tangentes sejam reciprocamente reciprocas.

169. Resolver o systema das duas equações:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= \sin a \\ \cos x + \cos y &= 1 + \cos a\end{aligned}$$

170. Resolver o systema das duas equações:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= \sin a \\ \cos x + \cos y &= 1 + \cos a\end{aligned}$$

Exercicios sobre o Capitulo V.

Triangulos rectangulos.

Resolver os triangulos rectangulos cujos dados se nom:

1º Caso.

2º Caso.

$$\begin{aligned}171. & \left\{ \begin{array}{l} a = 230^m \\ B = 38^\circ \end{array} \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}172. & \left\{ \begin{array}{l} a = \dots \\ B = 38^\circ \end{array} \right.\end{aligned}$$

3º Caso.

4º Caso.

$$\begin{aligned}173. & \left\{ \begin{array}{l} a = 117^m, 89 \\ b = 48^m \end{array} \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}176. & \left\{ \begin{array}{l} a = 5678^m, 76 \\ b = 3456^m, 48 \end{array} \right.\end{aligned}$$

179. Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo

$$c = 102^m \quad e \quad \frac{b}{a} = 0.6$$

180. Qual é a altura de uma torre que dá 96 m. de sombra, quando o sol está na altura de $52^\circ 30'$ acima do horizonte?

181. Qual é o comprimento da sombra projectada por uma arvore de 10 m. de altura, quando o sol está na altura de 30° acima do horizonte?

182. Determinar a altura do sol quando a sombra de um estylo vertical é igual a $\frac{1}{2}$ a altura do estylo.

183. Qual é a altura do sol quando a sombra de um objecto vertical é igual a $\frac{1}{2}$ a altura do objecto?

184. A altura do sol quando o comprimento da sombra é igual a $16^m, 64$ e o ângulo de elevação é $16^\circ, 64$.

185. Um triangulo rectangulo tem a hipotenusa igual a 10 e a soma dos seus catetos igual a 6. Qual é a altura do sol?

186. A altura do sol quando o comprimento da sombra é igual a 10 e a soma dos seus catetos é igual a 6.

187. Um triangulo rectangulo tem a hipotenusa igual a 10 e o comprimento de um dos catetos é igual a 6.

188. Num triangulo rectangulo, a hipotenusa é igual a 10 e o ângulo de elevação é 45° .

Triangulos quaesquer.

Resolver os triangulos cujos dados seguem :

1º Caso.

$$189. \begin{cases} A = 32^\circ 57' \\ B = 123^\circ \\ a = 117^\circ 80' \end{cases}$$

$$190. \begin{cases} A = 57^\circ 32' 7'',6 \\ B = 73^\circ 42' 50'' \\ a = 25\,432^m,46 \end{cases}$$

2º Caso.

$$191. \begin{cases} a = 167^m \\ b = 145^m \\ C = 54^\circ \end{cases}$$

$$192. \begin{cases} b = 61\,686^m,54 \\ c = 51\,956^m,90 \\ A = 24^\circ 26' 56'' \end{cases}$$

3º Caso.

$$193. \begin{cases} a = 75^m \\ b = 92^m \\ c = 107^m \end{cases}$$

$$194. \begin{cases} a = 456^m,48 \\ b = 518^m,50 \\ c = 592^m,30 \end{cases}$$

4º Caso.

$$195. \begin{cases} a = 105^m \\ b = 110^m \\ A = 58^\circ \end{cases}$$

$$196. \begin{cases} b = 53^m,60 \\ c = 35^m,20 \\ B = 71^\circ 15' \end{cases}$$

197. O angulo de elevação do vertice de uma torre vertical é de $43^\circ 15'$ a 72^m da torre; estando o olho do observador a $1^m, 10$ acima do solo. Qual é a altura da torre?

198. O angulo d'elevação do vertice de uma torre vertical cujo pé é inacessível é de $24^\circ 36'$; avançando 32^m para a torre, o angulo d'elevação do vertice é então igual a $40^\circ 12'$. Qual é a altura da torre? A base de operação é horizontal, e os olhos do observador estão a $1^m, 50$ de altura do solo.

199. Achar a altura de uma montanha. A base d'operação AB que se escolheu tem 215^m , os angulos formados por esta base e os raios visuaes dirigidos ao vertice da montanha são $A = 52^\circ 27' 18''$ e $B = 41^\circ 19' 25''$; além d'isto, um d'esses raios visuaes AC faz, com a vertical da estação A, um angulo de $43^\circ 19' 12''$.

200. Tres pontos A, B, C, sendo dados no mappa de um paiz, pede-se para determinar a posição de um quarto ponto M, d'onde as distancias $AC = 200^m$ e $BC = 170^m$ foram vistas debaixo de angulos conhecidos $\alpha = 46^\circ 17' 13'',2$ e $\beta = 30^\circ 9'$. Sabe-se tambem que os quatro pontos estão sobre o mesmo plano, e que o angulo $ACB = 114^\circ 40' 8'',4$ (Calcular-se ha MC.)

Exercicios que não exigem emprego de taboas.

201. Um dos lados de um triangulo é duplo de um outro e o angulo comprehendido tem 60° . Calcular os outros dois angulos.

202. Verificar que n'um triangulo rectangulo temos :

$$rr' = r'' r''' = S$$

203. Achar a condição para que o raio do circulo circumscripto a um triangulo seja igual ao triplo do raio do circulo inscripto.

204. Exprimir as tres alturas h, h', h'' , de um triangulo em função dos lados e dos angulos.

205. Calcular as tres alturas de um triangulo em função dos tres lados.

206. Em um triangulo, conhece-se um lado c e os angulos adjacentes A e B; calcular a bissectriz do angulo A e o segmento de BC adjacente a AB.

207. Dados os tres lados de um triangulo, calcular a bissectriz de um dos angulos.

208. Os lados de um triangulo medem respectivamente $x^2 + x + 1$, $2x + 1$, $x^2 - 1$, a letra x designando um numero maior que 1. Verificar que o angulo opposto ao primeiro lado é um angulo de 120° .

209. Os lados do angulo recto de um triangulo rectangulo sendo $2m$ e $m^2 - n^2$, calcular as tangentes dos semi-angulos agudos.

210. Calcular os lados b e c d'um triangulo rectangulo do qual se conhece a hypotenusa a , e no qual os angulos B e C verificam a relação : $\sin B = 2 \sin C$.

211. Os tres lados de um triangulo são $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; calcular, sem taboas, os angulos d'este triangulo, sua superficie e o raio do circulo circumscripto.

212. N'um triangulo $A = 45^\circ$ e os lados que o comprehendem $b = 4$, $c = \sqrt{2}$; calcular, sem taboas, o seno e o coseno de cada um dos angulos B e C.

213. N'um triangulo, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$ e o angulo $C = 60^\circ$; calcular sem taboas de logarithmos : 1º o lado a ; 2º o seno e o coseno dos angulos A e B.

214. Calcular a base e os angulos de um triangulo isosceles, sabendo que o lado é igual a 2^m e a superficie a 1^m .

215. O lado AB de um triangulo rectangulo em A é dividido no ponto I em dois segmentos. Exprimir, por meio de uma fórmula logarithmica, o segmento AI, conhecendo-se o outro segmento IB = l e os dois angulos BCI = α e ACI = β .

INDICE DAS MATERIAS

PRELIMINARES

§ I. Segmentos de recta.....	1
§ II. Projectões orthogonaes sobre um eixo.....	3
§ III. Funções. — Objecto do curso.....	6

PRIMEIRA PARTE FUNÇÕES CIRCULARES

CAPITULO I

Linhas trigonometricas.

I. Arcos e angulos.....	9
II. Definição das linhas trigonometricas.....	14
III. Relações entre as linhas trigonometricas de certos arcos.....	18
IV. Variações das linhas trigonometricas.....	21
V. Arcos tendo uma linha trigonometrica dada.....	26
Exercicios.....	29

CAPITULO II

Fórmulas trigonometricas.

§ I. Relações entre as linhas trigonometricas de um mesmo arco.....	32
§ II. Expressão trigonometrica da projectão de um contorno polygonal.....	37
§ III. Adição dos arcos.....	38
§ IV. Multiplicação dos arcos.....	41
§ V. Divisão dos arcos.....	45
§ VI. Transformações logarithmicas.....	51
Exercicios.....	57

CAPITULO III

Taboas trigonometricas.

§ I. Construção das taboas.....	62
§ II. Emprego das taboas.....	66
Exercicios. — Limites de algumas expressões trigonometricas.....	72

CAPITULO IV

Equações trigonometricas.

§ I. Equações a uma incognita. Resolução trigonometrica da equação do segundo gráo.....	79
§ II. Equações simultaneas.....	89
Exercicios. — Variações de algumas funções trigonometricas.....	20

SEGUNDA PARTE

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS

CAPITULO V

Resolução dos triangulos nos casos elementares.

§ I. Triangulos rectangulos.....	99
§ II. Triangulos quaesquer.....	104
Exercicios.....	122

CAPITULO VI

Appliação ao levantamento de plantas.

§ I. Medidas das distancias inaccessiveis.....	125
§ II. Problema da carta.....	127
Exercicios.....	129

CAPITULO VII

Resolução de triangulos fóra dos casos elementares.

§ I. Calculo dos elementos secundarios em função dos elementos principais.....	131
§ II. Expressão dos diversos elementos de um triangulo em função dos angulos e do raio do circulo circumscripto.....	134
§ III. Resolução de alguns triangulos.....	138
Exercicios.....	141

CAPITULO VIII

Applicações diversas.

§ I. Quadrilatero inscriptivel.....	147
§ II. Exercicios de geometria plana.....	149
§ III. Exercicios de geometria no espaço.....	150

APPENDICE

I.	Demonstração geometrica das formulas de seno ($a + b$) et de coseno ($a + b$)	156
II.	Representação trigonometrica das expressões imaginarias. Formula de Moivre.....	159
III.	Resolução trigonometrica da equação binomia.....	162

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Exercicios sobre o capitulos I e II.....	165
Exercicios sobre o capitulo III.....	166
Exercicios sobre o capitulo IV.....	168
Exercicios sobre o capitulo V.....	171
Exercicios que não exigem emprego de taboas	172

MATHEMATICAS

Arithmetica elementar (Curso de), por B. ALVES CARNEIRO.

Curso elementar de Matemática, teórico, pratico e aplicado :

Primeira parte : Arithmetica, por Dr AARAO REIS, professor da Escola
politecnica do Rio de Janeiro.

Segunda parte : Algebra. 2 vols.

CURSO

DE

MATHEMATICAS ELEMENTARES

De F. I. C.

Revisto e adaptado as escolas de instrucção secundaria do Brazil.

Elementos de Arithmetica

— de lgebra.

— de Geometria.

— de Geometria

descriptiva.

Elementos de Trigonometria.

— de Cosmographia.

— de Mecanica.

— de Agrimensura.

Geometria (Elementos de), por LEGENDRE e BLANCHET.

Taboas de logarithmos, por M. CHOLLET.

SCIENCIAS NATURAES

Agronomia (Noções geraes de), por MAXIMINO MACIEL.

Botanica Geral (Licções de), por MAXIMINO MACIEL.

Geologia (Resumo de), com 141 gravuras, no texto por A. DE LAPPARENT,
traduzido pelo Dr B. F. RAMIZ GALVÃO.

Historia Natural (Curso de), por J. LANGLEBERT.

Mineralogia (Compendio de), por A. DE LAPPARENT, traducção do Dr
B. F. RAMIZ GALVÃO

Zoologia e Botanica Geraes (Elementos de), pelo Dr. MANOEL
BOMFIM.

Zoologia Geral e Descriptiva (Elementos de), por MAXIMINO MACIEL

Zoologia (Compendio de), pelo Dr. MANOEL BOMFIM.

PHYSICA E CHIMICA

Chimica (Compendio de), por L. TROOST. Traducção do Dr. B. F. RAMIZ
GALVÃO.

Chimica (Curso de), por LANGLEBERT.

Physica (Tratado de), por J. LANGLEBERT.

GEOGRAPHIA

A terra illustrada.